分类号____________　　　　　　　　　　　　学号 M201070012

学校代码 10487　　　　　　　　　　　　　　密级____________

华中科技大学

硕士学位论文

分数随机微分方程解的存在唯一性

学位申请人：　亓新祥

学 科 专 业：　运筹学与控制论

指 导 教 师：　梅正阳　副教授

答 辩 日 期：　**2012** 年 **5** 月 **19** 日

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Master of Science

Existence and Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations Driven by a Fractional Brownian Motion

Candidate : Qi Xinxiang

Major : Operations Research and Cybernetics

Supervisor : Associate Professor Mei Zhengyang

Huazhong University of Science & Technology

Wuhan 430074, P.R.China

May, 2012

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 尽我所知，除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果. 对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者签名：

日期：　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅. 本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

本论文属于　保密□，　在______年解密后适用本授权书.

　　　　　　不保密□.

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：　　　　　　　　指导教师签名：

日期：　　年　　月　　日　　　　　日期：　　年　　月　　日

摘　要

在上世纪九十年代之前，Brown 运功以及基于 Brown 运动的随机微分方程理论在随机分析中占据了重要地位，并广泛的应用到金融、随机网络等领域. 但是随着研究的深入，发现在金融市场上出现了诸如股票价格的波动遵循“有偏随机游走”、收益率呈“尖峰厚尾”的分布等分形现象，而分数 Brown 运动的自相似性与长期记忆性恰好能予上述现象以合理解释. 因此，关于分数 Brown 运动的数学理论成为研究分形市场的重要工具.

本文的主要工作：首先对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程及分数型 Itô 公式进行了改进与推广；其次，推导出 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 和 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时，相应的分数线性随机微分方程的一般解；最后，证明了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 时，分数随机微分方程解的存在唯一性. 这些成果进一步完善了分数随机微分方程的理论.

本文主要分为五章：第一章阐述了问题的研究背景与意义，国内外在该领域的研究概况以及本文的主要内容和架构. 第二章首先给出了预备知识，然后介绍分数 Brown 运动及分数阶积分，最后对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程和分数型 Itô 公式作以改进与推广，得到更为一般化的分数随机微分方程. 第三章分别推导出了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 和 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时，相应的分数线性随机微分方程的一般解. 第四章利用 Picard 逐步逼近的方法证明了一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程解的存在唯一性定理，并对方程的近似解进行了误差估计. 第五章对全文内容及创新点予以总结，并提出了论文的下一步研究工作.

关键词 ： 分数 Brown 运动　　分数阶 Maruyama 表示　　随机微分方程　　Picard 逼近　　解的存在唯一性

Abstract

Before the 1990s, Brownian motion and the theory of SDE based on it occupied an important position in the stochastic analysis, and they were widely applied to the fields such as finance, random networks, and so on. However, with the further research, many scholars find some phenomena in financial markets such as the fluctuation of stock price follows a " biased random walk" process and the rate of return has "decile-shaped fat tail" distribution, which can be only exactly reasonable explained by the self-similarity and long-term memory of fractional Brownian motion (FBM). So, the mathematical theory of the fractional Brownian motion is an important tool to study the fractal market.

The main work: The first is to improve and the existing fractional stochastic differential equations (FSDE) and fractional Itô formulas; Second, we give the general solutions of the corresponding linear FSDE with Hurst exponent $H \in (1/3, 1/2)$ and $H \in (1/n, 1/(n-1))$ respectively; Finally, the proof of existence and uniqueness for solutions of FSDE based on the fractional Maruyama notations with Hurst index $H \in (1/3, 1/2)$ is given. These results can go further to improve the theory of FSDE.

This thesis is divided into five chapters. Chapter one describes the backgrounds and significance of this question, the domestic and international research profiles in this area, the main content and architecture of this paper. In the second chapter, we first give the preparatory knowledge, introduce FBM, fractional integral and FSDE, then improve and promote the existing FSDE and the fractional Itô formulas to the new ones. Chapter three deduces the general solution of the corresponding linear FSDE with Hurst exponent $H \in (1/3, 1/2)$ and $H \in (1/n, 1/(n-1))$ respectively. In the fourth chapter, we use the Picard successive approximation method to prove the existence and uniqueness of solutions of FSDE with Hurst index $H \in (1/3, 1/2)$. Then, make an error estimate on the approximate solution. In the last chapter, we summarize the full-text content and innovations and put forward the next research work.

Key words: Fractional Brownian motion　Maruyama notation of fractional order　Stochastic differential equations　Picard approximation　Existence and uniqueness of solutions

目 录

1 绪 论

作为本文的开篇之章，本章节主要是对该课题的研究作以综合概述和分析. 本章首先介绍了课题的研究背景与意义，然后概述了课题的国内外研究概况，最后给出了本文的主要研究内容与架构.

1.1 研究背景与意义

微分方程是人们刻划客观事物发展和变化的重要数学工具，也是一种表达自然规律的自然的数学语言. 微分方程基本大致分为两大类：确定性微分方程（常微分方程、偏微分方程以及泛函微分方程）与随机性微分方程. 对于确定性微分方程的研究已经取得了丰硕的成果，其基本理论也在不断趋于完善，并且在数学建模中得以广泛的应用. 然而在复杂的实际环境中，事物的发展和变化会受到很多的干扰因素或不确定因素的影响，这使得确定性微分方程不能很好地用于实际问题的研究. 因此，在1951 年日本数学家 Itô 出版了具有划时代意义的著作《On Stochastic Differential Equations》，他提出了数学中微分方程领域的一个新分支—“随机微分方程”（SDE）

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

其中，W_t 是标准 Brown 运动.

随机微分方程是介于概率论与微分方程之间的交叉学科，是两个数学分支互相渗透的结果. 经过诸多学者几十年的研究，随机微分方程理论的研究也取得了很大的进展，人们对于周围自然界中无处不在的随机现象也有了深刻的理解，并不断地将随机微分方程应用到数学以及其他领域.

在金融市场上，目前关于证券价格波动规律的研究中最具有影响力的当属基于 Brown 运动的有效市场假说理论(efficient market hypothesis，EMH)以及基于分数 Brown 运动和非线性动力学基础的分形市场假说理论. 在上世纪 90 年代之前，期权定价的许多理论主要是在 EMH 框架下研究的，如 Fisher Black 和 Myron Scholes[1]提出的 Black-Scholes 期权定价公式,其中标的资产的价格就是满足随机微分方程的. 但

是随着金融市场的不断壮大，很多研究者分析发现 EMH 并不能完全适用于金融市场. 如 1990 年 Turner 与 Weigel[2]对证券市场的股票价格收益率统计研究发现，其分布并不是呈现为正态分布，而是呈“尖峰厚尾”的分布；另外，戴国强等[3]研究指出股票价格的波动并不是随机游走，而是“有偏的随机游走”，即在不同的时期具有长期记忆性. 这些现象都无法用有效市场理论予以合理解释，而分数 Brown 运动所具有的自相似性和长期记忆性等特征恰好与这些现象相吻合. 于是，1994 年，Peters[4]提出的基于分数 Brown 运动的分形市场假说理论成为近年来众多学者关注和研究的重点，分数 Brown 运动的许多重要性质使其成为研究分形市场理论的重要数学理论工具. 因此，建立基于分数 Brown 运动的随机微分方程（分数随机微分方程，FSDE）对于研究分形市场下的期权定价具有十分重要的意义.

在随机微分方程的定性理论研究中，随机微分方程初值解的存在唯一性是一个基础并且非常重要的课题. 它是随机分析的理论基础，对应用问题的研究也有着重要意义. 基于此，本文的主要工作就是研究分数随机微分方程解的存在唯一性. 接下来，对该课题国内外的研究概况做整体性的了解.

1.2 随机微分方程解的研究概况

随机微分方程的解与常微分方程（ODE）的解不同之处在于：随机微分方程的解有强解和弱解之分，而且解的唯一性又分为指轨道唯一（即方程的解随机等价无差别）和分布唯一（即方程的所有解具有相同的分布）.

首先，介绍下 Brown 运动与随机微分方程解的存在唯一性的研究概况.

1.2.1 Brown 运动与 SDE 解的存在唯一性

Brown 运动是一种表现为无规则运动的随机游走现象，它是由英国著名植物学家 Robert Brown 早在 1828 年首次发现的，之后引起了很多学者的研究. Brown 运动由于具有连续的轨道性、增量服从正态分布性以及增量独立性等特征，所以被广泛的应用到随即环境中. 由 Brown 运动驱动的随机微分方程是由日本数学家 Itô 首先提出的，它的引入更加凸显了 Brown 运动的理论性和实用性，进一步完善了随机分析

理论.

有了方程的引入，必然首先关注的是其解的问题，而研究解的首要问题就是解的存在性和唯一性，然后尝试着能否求得解以及探索解的有关性质. 关于由Brown运动驱动的随机微分方程解的存在性和唯一性已经有很多学者给予了证明，如Arnold[5]，Bernt Øksendal [6]，Gard [7]都给出了解的存在唯一性的充分条件；Yeh在[8]中发展了由单个Brown运动所驱动的SDE的理论，他首次给出了在系数仅为连续性的情况下方程弱解的存在性，以及在弱解存在和轨道唯一性的条件下SDE强解的存在唯一性证明；曹桂兰[9]定义了关于无穷个一维Brown的随机积分，并在非Lipschitz条件下证明了方程解的存在唯一性等.

接下来，对分数Brown运动与分数随机微分方程解的存在唯一性等研究成果作以归纳.

1.2.2 分数 Brown 运动与 FSDE 解的存在唯一性

分数 Brown 运动最早是由 Kolmogorov[24]提出来的，它具有 Brown 运动所不具有的自相似性和长期记忆性等特征，而这些特征恰好与自然现象以及社会现象的内在特性相吻合. 所以，分数 Brown 运动以及由分数 Brown 运动驱动的随机微分方程在金融、水文、信息以及随机网络等领域都得到了广泛的应用.

关于分数随机微分方程解的存在唯一性的证明，其实质就是将其转化成与之等价的同解积分方程，然后证明该积分方程解的存在唯一性即可，所以关于分数 Brown 的随机积分形式的选择也变得尤为重要. 自从引进分数 Brown 运功后，最常用的分数 Brown 运动是具有 Liouville 形式的，即

$$B_t^H = \int_0^t (t-s)^\alpha \, dW_s, \quad H \in (0,1), \alpha = H - 1/2$$

其中，W_t 是标准的 Brown 运动. 当 Hurst 指数 $H = 1/2$ 时，B_t^H 即为标准的 Brown 运动 W_t；当 Hurs 指数 $H \neq 1/2$ 时，分数 Brown 运动 B_t^H 既不是 Markov 过程，也不是半鞅[10]，从而通常的 Itô 型随机积分已不再适用. 因此，不能再使用基于 Brown 运动的SDE 理论来分析分数随机微分方程，这时需要定义新的积分，并讨论在新积分下分数随机微分方程解的存在唯一性. 在近十几年来，关于分数 Brown 运动的积分也有

很多学者给出了定义和应用，通常使用最多的积分形式为路径积分和 Wick 积分.

关于研究的分数随机微分方程的形式，到目前为止，通常有以下两种形式：

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + dB_t^H$$

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t^H$$

其中，B_t^H 表示 Hurst 指数为 $H\,(0 < H < 1)$ 的分数 Brown 运动. 对于上述第一个方程，其解的存在唯一性等理论已经有了很大的研究成果，可参考文献[11][12][13]. 而对于第二个方程，其研究成果相对较少. 根据关于分数 Brown 运动的积分定义的不同，其相应分数随机微分方程的理论分析也迥异. 当 Hurst 指数 $H = 1/2$ 时，其积分即是通常的 Itô 随机积分，该方程为通常的随机微分方程，其解的存在唯一性已经在上一节予以分析；当 Hurst 指数 $1/2 < H < 1$ 时，其解的存在唯一性也得到了诸多学者的研究，如 B. Boufoussi[14]和 D. Nualart[15]等人，利用路径积分分别证明了一维和多维分数随机微分方程强解的存在唯一性. 但是至于 Hurst 指数 $0 < H < 1/2$ 的情形，关于其解的存在唯一性的研究相对甚少，这是因为当 Hurst 指数 $0 < H < 1/2$ 时，分数 Brown 运动具有反持久效应，相比于 Brown 运动，分数 Brown 运动波动得更剧烈，而且随着 Hurst 指数 H 越趋近于 0 其波动越剧烈，这使得关于分数 Brown 运动的积分变得更加复杂，从而相应方程的解也变得扑朔迷离. 其中，L.Coutin 在文献[16]中使用 p 次变差和 Lyons [17]中的极限定理，建立了分数随机微分方程解的存在性.

1.3 本文的主要研究内容及架构

到目前为止，研究分数随机微分方程的学者绝大所数都是止步于以上通用形式的分数随机微分方程. 与前人的工作相比，本文的主要特点在于：首先根据属于不同区间 $1/n < H < 1/(n-1)$，$n = 3, 4, \cdots$ 的 Hurst 指数 H，通过 Taylor 展式对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程以及分数型 Itô 公式进行改进与推广. 然后，分别给出了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 和 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时，相应的分数线性随机微分方程的一般解. 最后，本文采用 Guy Jumarie[41]提出的一种新的积分，给出了当 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$，基于分数阶 Maruyama 表示的分数随机微分方程解的存在唯一性定理，

并对方程的近似解和真实解进行了误差估计. 这些研究结论具有一定的创新性，丰富了分数随机微分方程的基本理论.

本文内容主要由以下五部分构成.

第一章：绪论. 阐述了问题的研究背景与意义，国内外在该领域的研究概况以及本文的主要研究内容及架构.

第二章：分数随机微分方程的基本理论. 首先，预备知识部分，主要是一些基本概念、预备定理以及重要不等式等；其次，分数 Brown 运动的定义与性质；再次，关于分数 Brown 运动的随机积分，主要是在以往关于分数 Brown 运动的随机积分的理论基础上，综合叙述了分数阶导数、关于$(dt)^{\alpha}$的积分以及分数阶 Maruyama 表示等；最后，对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程以及分数型 Itô 公式作以改进和推广，发展了一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程.

第三章：分数线性随机微分方程的一般解. 首先，对分数线性随机微分方程解的研究状况进行了论述；然后，推导出了 Hurst 指数$H \in (1/3, 1/2)$时，分数线性随机微分方程的一般解；最后，将分数线性随机微分方程的一般解进一步推广到了 Hurst 指数$H \in (1/n, 1/(n-1))$的情形.

第四章：分数随机微分方程解的存在唯一性. 首先，对基于分数阶 Maruyama 表示的分数随机微分方程作以简单介绍；紧接着，界定了分数随机微分方程解的基本概念；然后，在通常的一致 Lipschitz 条件、线性增长条件以及有界条件下，利用 Picard 逐步逼近的方法，给出了 Hurst 指数$H \in (1/3, 1/2)$时，基于分数阶 Maruyama 表示的，且满足初值条件$X_0 = Z(\omega)$的分数随机微分方程：

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t)d\beta_1(t, H) + \gamma(t, X_t)d\beta_2(t, 2H), \quad t \in [0, T]$$

解的存在唯一性定理及其证明；最后，对分数随机微分方程的近似解与真实解进行了误差估计.

第五章：总结与展望. 对全文内容及创新点进行总结，并提出了论文的下一步改进方向.

2　分数随机微分方程的基本理论

鉴于分数 Brown 在随机分析理论和实践运用中起到的如此重要作用，本章将对分数 Brown 运动的有关理论做一般定性的介绍. 本章节主要包括以下四部分内容：2.1 节给出了相关的一些的预备知识; 2.2 节介绍了分数 Brown 运动的定义及其性质; 2.3 节首先对关于分数 Brown 运动的随机积分做了介绍，然后给出分数阶导数和积分的有关知识，以及分数阶 Maruyama 表示；2.4 节对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程以及分数型 Itô 公式行了改进与推广，拓宽了分数随机微分方程的研究领域.

2.1　预备知识

本节内容主要概述了随机分析的一些基本概念、符号说明，以及文章后续工作中所需的预备定理和重要不等式等.

2.1.1　基本概念及符号说明

以下所述的基本概念和符号说明等，主要源于参考文献[18][19][20]，本文将继续沿用这些概念和符号表示.

定义[18]**2.1.1**　在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，设$\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\}$是$\mathcal{F}$的一族子$\sigma$代数，如果它随$t$增大而递增，即若$s<t$则有$\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$，则称$\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\}$为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个$\sigma$**代数流**，简记为$\{\mathcal{F}_t\}$或$\mathcal{F}_t$.

直观意义上讲，在金融市场上，可将$\mathcal{F}_t$理解为到时间t为止所有可能利用的信息集合，这种信息会随时间的推进而逐步展开，因此，$\mathcal{F}_t$自然随t的增大而扩大.

定义[18]**2.1.2**　任意一族随机变量$\{X_t,t\in T\}$称为以T为参数集的**随机过程**. 对每个固定的$\omega\in\Omega$，$X_t=X(t,\omega)$作为关于$t\in T$的函数，称X_t为该随机过程的**样本轨道**. 对任意两个随机变量X与Y，如果满足$P\{\omega\in\Omega,X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$，则称它们是**等价**的.

下面给出适应过程的基本概念.

定义[18]**2.1.3** 若对任意的随机过程$\{X_t, t\in T\}$，令$\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s, t\geq s\in T), t\in T$，则称$\{\mathcal{F}_t^X : t\in T\}$为过程$X_t$**生成的**$\sigma$**代数流**. 若随机过程$X_t$是$\mathcal{F}_t$可测的，即$\sigma(X_t)\subseteq\mathcal{F}_t$，$(\Leftrightarrow \mathcal{F}_t^X\subseteq\mathcal{F}_t)$则称$X_t$称为$\mathcal{F}_t$**适应过程**.

在随机过程理论研究中，随机变量的收敛性是一个很重要的知识点. 下面将以随机变量序列$\{X_n, n\in N_+\}$为例给出各种收敛的概念以及它们之间的关系.

定义[19][20]**2.1.4** 设$\{X_n, n\in N_+\}$为随机变量序列，

（1） 若存在r.v. $X=X(\omega)$，使得

$$P\{\omega\in\Omega, X_n(\omega)\to X(\omega)\}=1,$$

则称$\{X_n, n\in N_+\}$**几乎必然收敛**（或以概率 1 收敛）于X，记为：$X_n\to X$, a.s..

（2） 若存在r.v. $X=X(\omega)$，使得对任意的$\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon)=0,$$

则称$\{X_n, n\in N_+\}$**依概率收敛**（或随机收敛）于X，记为：$X_n\xrightarrow{P}X$.

（3） 设$\{X_n, n\geq 1\}\subseteq L^p(p\geq 1)$，若存在r.v. $X=X(\omega)\in L^p$，使得

$$\lim_{n\to\infty}E\left[|X_n-X|^p\right]=0,$$

则称$\{X_n, n\in N_+\}$ p**阶矩收敛**（或p次平均矩收敛）于X，记为$X_n\xrightarrow{L^p}X$. 当$p=2$时，称为**均方收敛**，记为：

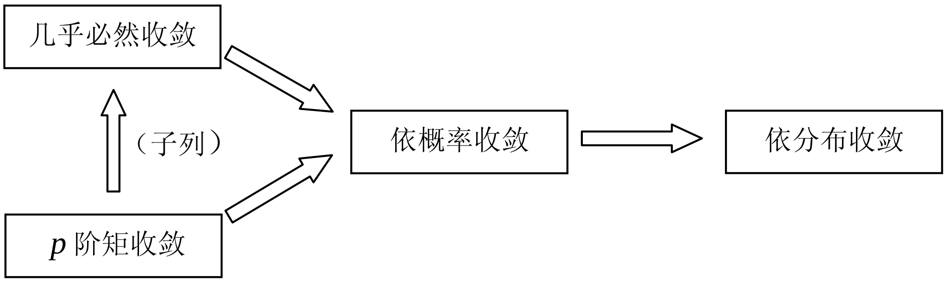
$$X_n\xrightarrow{L^2}X\Leftrightarrow X=\text{l.i.m.}X_n\Leftrightarrow X_n\to X, \text{m.s.}$$

（4） 若存在r.v. $X=X(\omega)$，设$F_n(x)$和$F(x)$分别是X_n和X的分布函数，如果在$F(\cdot)$的所有连续点x处，都有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x),$$

则称$\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$，称$\{X_n, n\in N_+\}$**依分布收敛**于X，记为：$X_n\xrightarrow{d}X$.

以上四种随机收敛性之间的关系如下图所示：



为了研究的简洁、方便，本文使用了一些约定符号，具体符号说明如下.

符号说明[20]

$L^p(\Omega,\mathbb{R})$：表示 p 次可积，即满足 $E\left[\left|X(t)\right|^p\right]<\infty$ 的 $\mathbb{R}$ 值的随机变量 $X(t)$ 的全体，简记为 L^p；

$\mathcal{L}^p([0,T],\mathbb{R})$：表示满足 $\int_0^T \left|X(t)\right|^p dt<\infty$, a.s. 的可测且 $\mathcal{F}_t$ 适应的 $\mathbb{R}$ 值随机过程 $\{X(t):t\in[0,T]\}$ 的全体；

$\mathcal{M}^p([0,T],\mathbb{R})$：表示满足 $E\left[\int_0^T \left|X(t)\right|^p dt\right]<\infty$ 的 $\mathcal{L}^p([0,T],\mathbb{R})$ 中的随机过程 $\{X(t):t\in[0,T]\}$ 的全体.

2.1.2 预备定理及重要不等式

本文在证明分数随机微分方程解的存在唯一性定理时，经常会使用到一些引理和重要不等式等，下面对其略加介绍.

引理[21]**2.1.5** （Borel-Cantelli's 引理）

(1) 若 $\{A_k\}$ 为一无穷事件序列，$A_k\in\mathcal{F}$ 并且 $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)<\infty$，则

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right)=0. \qquad (2.1.1)$$

即存在某集合 $\Omega_1\in\mathcal{F}$，满足 $P(\Omega_1)=1$ 及正整数 $k_0=k_0(\omega)$，使得对几乎所有的 $\omega\in\Omega_1$，当 $k\ge k_0$ 时，都有 $\omega\notin A_k$.

(2) 若$\{A_k\}$为一独立事件序列，$A_k \in \mathcal{F}$ 并且$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$，则

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 1.$$

即存在某集合$\Omega_2 \in \mathcal{F}$，满足$P(\Omega_2)=1$，使得对几乎所有的$\omega \in \Omega_2$，存在子列$\{A_{k_i}\}$，使得ω属于每一个A_{k_i}.

重要不等式[19]

（i）Hölder 不等式

若函数$f(x)$与$g(x)$为区间$[a,b]$上的非负连续函数，则有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[\int_a^b (f(x))^p dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b (g(x))^q dx\right]^{1/q}，其中\ p>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (2.1.2)$$

（ii）范数三角不等式

设$X,Y \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$，$\|\cdot\|_2$为空间上的2范数，则有则有$\|X+Y\|_2 \le \|X\|_2 + \|Y\|_2$（2.1.3）

（iii）Chebyshev's 不等式

$$P\left\{\omega : |X(\omega)| > \varepsilon\right\} \le \varepsilon^{-p} E\left[|X(\omega)|^p\right]，其中\ \varepsilon>0, p>0, X(\omega)\in L^p. \qquad (2.1.4)$$

（iv）Gronwall 不等式

设K为非负常数，函数$f(x)$与$g(x)$为区间$[a,b]$上的非负连续实函数，且对所有的$x\in[a,b]$都有不等式

$$f(x) \le K + \int_a^x f(s)g(s)ds$$

成立，则有

$$f(x) \le K\cdot\exp\left(\int_a^x g(s)ds\right),\quad x\in[a,b]. \qquad (2.1.5)$$

2.2 分数 Brown 运动的定义与性质

在介绍分数 Brown 运动的定义及其有关性质之前，首先回顾一下 Brown 运动的定义与性质.

2.2.1 Brown 运动的定义与性质

1828 年，英国著名植物学家 Robert Brown 用显微镜观察到液体中悬浮的花粉颗粒永不停息地做无规则的运动，但在当时他并没有给予解释此现象，后来随着对该现象的深入研究，人们把这种运动称之为 Brown 运动. 直到 1905 年，伟大的物理学家 Albert Einstein 用物理学中的分子动力学原理以数学的方式描述了 Brown 运动，从而解释了这个现象. 1923 年，Wiener[22]构造了 Brown 运动的数学模型，并且给出了它的精确数学定义.

定义[23]2.2.1 设$\left\{ B_t = B(t,\omega), t \ge 0, \omega \in \Omega \right\}$为定义于概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机过程，如果它满足以下条件:

（i） $B_0 = 0$;

（ii） B_t 具有平稳的独立增量;

（iii）对任意的$t > 0$, B_t服从均值为 0,方差为$\sigma^2 t$的正态分布,即$B_t \sim N(0, \sigma^2 t)$,其中，$\sigma$为非负常数.

则称此过程为 Brown **运动**（或 Wiener 过程）. 当$\sigma^2 = 1$时，称之为**标准** Brown **运动**,记为W_t.

通过以上定义，可以不加证明地得到 Brown 运动具有以下与定义等价的性质.

性质[23]2.2.2

Brown 运动B_t是具有以下性质的随机过程：

（1）轨道的连续性

对几乎所有的$\omega \in \Omega$，B_t是关于t的连续函数，且$E[B_s B_t] = \sigma^2 \min(s,t)$.

（2）增量的正态性

若$0 \le s < t$，则增量$B_t - B_s$是服从均值为 0，方差为$\sigma^2(t-s)$的正态分布，即

$$B_t - B_s \sim N\left(0, \sigma^2 (t-s)\right).$$

（3）增量的独立性

若$0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n, n \in N$，则增量$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$是相互

独立的.

Brown 运动的引入，使得人们对客观事物的意识从确定性环境转移到随机性环境中，并且人们开始不断地将 Brown 运动作为很重要的数学模型广泛的应用到随机环境中去，以解决实际问题. 但是，随着对 Brown 运动研究的深入发现，在使用 Brown 运动作为主要数学模型所得到的结论与实际问题不相符. 譬如说，在证券市场上据统计研究发现：股票价格收益率是呈“尖峰厚尾”的分布，而不是呈现为正态分布；股票价格的波动是“有偏的随机游走”，而并不是 Brown 运动的随机游走. 因此，用分数 Brown 运动取代 Brown 运动来研究随机问题也就势在必行. 基于以上 Brown 运动的定义与性质，接下来给出分数 Brown 运动的定义与性质.

2.2.2 分数 Brown 运动的定义与性质

分数Brown运动最早是由Kolmogorov在文章[24]中首次提出的，之后Mandelbrot 和 Van Ness 一直从事于该方向的研究. 1968 年，Mandelbrot 给出了分数 Brown 运动的如下数学定义.

定义[25]2.2.3 设常数 $H\in(0,1)$，Hurst 指数为 H 的**分数** Brown **运动**（fractional Brownian motion，简称 FBM）是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 的一个连续的中心化 Gauss 过程 $\left\{B_t^H=B_H(t,\omega),\, t\geq 0,\omega\in\Omega\right\}$，且满足以下条件:

（1） 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$，B_t^H 是关于 t 以概率 1 连续的，且 $B_0^H=0$，对所有的 $t\geq 0$，有 $E\left[B_t^H\right]=0$.

（2） 协方差函数

$$Cov(s,t)=R(s,t):=E\left[B_t^H B_s^H\right]=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-(t-s)^{2H}\right);\quad s,t\geq 0.$$

其中，Hurst 指数 H 是由气候学家 H. E. Hurst[26]在描述尼罗河每年水位变化的统计分析中提出来的，在接下来分数 Brown 运动的性质中将对其讨论.

关于分数 Brown 运动的具体形式，之前也有很多学者致力于研究，但其中最为大家所认同的是 Mandelbrot 在 1968 年[25]给出的分数 Brown 运动的表达式，即将其表示成基于标准 Brown 运动的随机积分形式，具体如下：

$$B_t^H := \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\left[Z_t + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s \right]$$

其中，$\Gamma(H+1/2)=\int_0^\infty x^{H-1/2}e^{-x}dx$，$Z_t=\int_{-\infty}^0\left[(t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}\right]dW_s$，$W_t$ 是标准 Brown 运动. 由于分数 Brown 运动 B_t^H 的长期记忆性主要体现在 $\int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s$ 上，所以 Nualart[27]建议将分数 Brown 运动表示成 Riemann-Liouville 形式的，即

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s,\quad 0<H<1.$$

接下来，本文不加证明的给出分数 Brown 运动的性质，其证明过程在很多参考文献中可以找到.

性质[28]2.2.4

设 B_t^H 为 Hurst 指数 $H\in(0,1)$ 的分数 Brown 运动，则其具有以下性质：

（i）增量 $B_t^H - B_s^H \sim N\left(0,(t-s)^{2H}\right)$，$0\le s<t$，即增量 $B_t^H - B_s^H$ 是服从均值为 0，方差为 $(t-s)^{2H}$ 的正态分布.

（ii）分数 Brown 运动 B_t^H 具有平稳的增量，即对任意的 $t,s,u,v,a\in\mathbb{R}_+$，有

$$E\left[\left(B_t^H-B_s^H\right)\left(B_u^H-B_v^H\right)\right]=E\left[\left(B_{t+a}^H-B_{s+a}^H\right)\left(B_{u+a}^H-B_{v+a}^H\right)\right].$$

（iii）分数 Brown 运动 B_t^H 具有自相似性(self-similarity)

$$\left\{ B_{\alpha t}^H(\omega),\, t\ge 0,\omega\in\Omega \right\} \overset{(law)}{=} \left\{ \alpha^H B_t^H(\omega),\, t\ge 0,\omega\in\Omega \right\},\quad \forall\alpha>0.$$

即对任意的 $H\in(0,1)$，$\alpha>0$，随机过程 $\left\{B_{\alpha t}^H(\omega),t\ge 0\right\}$ 与 $\left\{\alpha^H B_t^H(\omega),t\ge 0\right\}$ 具有相同的概率分布.

（iv）相关性与 Hurst 指数 H 的关系

假定从过去某时刻 $-t$ 到 0 的过去增量为 $B_0^H - B_{-t}^H$，从 0 到 t 的未来增量 $B_t^H - B_0^H$，由 $B_0^H=0$ 得，过去增量 $\left(-B_{-t}^H\right)$ 和未来增量 B_t^H 之间的相关函数记为：

$$\rho\left(-B_{-t}^H, B_t^H\right)=\frac{Cov\left(-B_{-t}^H, B_t^H\right)}{\sqrt{D\left(-B_{-t}^H\right)}\sqrt{D\left(B_t^H\right)}}=\frac{E\left[\left(-B_{-t}^H-E\left(-B_{-t}^H\right)\right)\left(B_t^H-E\left(B_t^H\right)\right)\right]}{\sqrt{(-t)^{2H}}\sqrt{t^{2H}}}$$

$$=\frac{E\left[-B_{-t}^H B_t^H\right]}{t^{2H}}=-\frac{(-t)^{2H}+t^{2H}-(2t)^{2H}}{2t^{2H}}=2^{2H-1}-1.$$

由此可见，当 Hurst 指数$H=1/2$时，未来增量和过去增量的相关系数是0，即过去增量不影响未来增量的变化，说明此随机过程增量是一个相互独立的随机过程. 此时的分数 Brown 运动B_t^H即为标准的 Brown 运动W_t，其路径表现为随机游走.

当 Hurst 指数$H\neq 1/2$时，增量之间不是相互独立的，即为分数 Brown 运动. 分数 Brown 运动具有长期记忆性，而本质上体现该特性的是 Hutst 指数H的大小.

当 Hurst 指数$1/2<H<1$时，过去增量和未来增量之间的关系是正相关的，称之为持久效应(persistent)，即过去的增长意味着未来可能将保持这种增长趋势；反之，过去的减少就平均意义而言，意味着未来将继续减少. 并且，随着H愈趋近于 1，该持久效应愈强烈；随着H愈趋近于$1/2$，持久效应愈减弱，并不断表现为随机性. 若令$\rho(n)=E\left[B_1^H\left(B_{n+1}^H-B_n^H\right)\right]$，则有$\rho(n)>0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(n)|=\infty$.

当 Hurst 指数$0<H<1/2$时，过去增量和未来增量之间的关系是负相关的，称之为反持久效应(antipersistent)，即过去的持续增长意味着未来将很大可能性地出现减少趋势；反之，过去的持续减少就平均而言，意味着未来将很大程度上出现增长趋势. 并且这种反持久效应会随着H愈趋近于 0，愈强烈，即有$\rho(n)<0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(n)|<\infty$. 正是由于在这种过程中存在着太多的频繁反转，才使得当$0<H<1/2$时，分数 Brown 运动的波动得相比于 Brown 运动的波动变得更加剧烈.

因为分数 Brown 运动所具有的自相似性和长期记忆性等特征与许多 Brown 运动所无法予以解释的自然现象以及社会现象的内在特性相吻合，所以分数 Brown 运动在金融、水文、信息以及随机网络等领域都得到了广泛的应用. 为了能够更好的研究关于分数 Brown 运动的微积分理论，以及由此而形成的基于分数 Brown 运动的随机微分方程及其解的理论，因此，有必要首先要建立关于分数 Brown 运动的随机积分.

2.3 关于分数 Brown 运动的随机积分

在本节中，首先对关于分数 Brown 运动的各种积分加以简单介绍，然后给出分数阶导数及关于$(dt)^{\alpha}$的积分的有关知识，最后给出分数阶的 Maruyama 表示.

2.3.1 关于分数 Brown 运动的积分简介

当 Hurst 指数$H=1/2$时，B_t^H即为 Brown 运动$B(t)$，而关于$B(t)$的随机积分即为通常的 Itô 积分，该积分在随机分析中占有重要的地位，并广泛的应用于各个随机领域. 当 Hurst 指数$H\neq 1/2$时，由于分数 Brown 运动B_t^H既不是 Markov 过程，也不是半鞅[10]，从而不能用半鞅理论来定义关于分数 Brown 运动的积分，并且 Itô 随机积分的某些性质也不再适合关于分数 Brown 运动的积分. 因此，在接下来分析分数随机微分方程时不能再使用基于 Brown 运动的 SDE 理论，而是需要寻求关于分数 Brown 运动的新的积分定义，并在新积分下讨论分数随机微分方程解的有关理论.

在近十几年来，关于分数 Brown 运动的积分也有很多学者给出了定义和应用，通常包括以下两种积分形式：

（i）路径积分

W.Dai[29]和 Decreusefond[30]等发展了路径积分，定义其形式记为$\int_0^T \phi(t,\omega)\,dB_t^H$. 如果$\phi(t,\omega)$为左连右极函数，则该积分可以用 Riemann 和来得到如下定义：

设区间$[0,T]$的划分为$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$，记$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}, k=1,2,\cdots,N$. 当（2.3.1）式右端所示的 Riemann 和在均方意义下极限存在时，则称关于分数 Brown 运动的随机积分存在，并记为

$$\int_0^T \phi(t,\omega)\,dB_t^H := \lim_{|\Delta t_k|\to 0}\sum_{k=1}^{N}\phi(t_k)\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right). \tag{2.3.1}$$

需要指出的是该定义下的积分是在固定的“路径”$\omega\in\Omega$下关于t的积分，因此，该积分一般称为路径积分. 然而，与关于 Brown 运动的 Itô 随机积分不同的是，路径积分的均值不为零，即$E\left[\int_0^t \phi(s)\,dB_s^H\right]\neq 0$. 而且，Rogers[31] Cheridito [32]已证明了基

于路径积分的金融市场数学模型中是存在套利机会的，因此，路径积分不再适用于金融市场.

（ii）Wick 积分

Wick 积分形式为$\int_0^T \phi(t,\omega)\delta B_t^H$，它是定义为如下 Riemann 和形式的：

$$\int_0^T \phi(t,\omega)\delta B_t^H := \lim_{|\Delta t_k|\to 0}\sum_{k=1}^{N}\phi(t_k)\lozenge\left(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H\right)$$

其中，◊ 为 Wick 乘积. Wick 积分与路径积分的不同之处在于定义中使用 Wick 乘积来取代了普通的乘积.

Yao Zhong Hu 和 B. Øksendal 在[33]中分析了 Hurst 指数$H > 1/2$时的 Wick 积分，Christian Bender[34]将积分延拓到 Hurst 指数$0 < H < 1$. 该积分具有关于 Brown 的 Itô 随机积分诸多性质. 例如，Wick 积分的期望为零，即$E\left[\int_0^T \phi(t,\omega)\delta B_t^H\right] = 0$. 并且，2003 年 Elliott 和 Vander Heek[35]，Hu, Y.[33]证明了基于 Wick 积分的金融市场上的分数 Black-Scholes 模型是无套利的. 因此，随后 Wick 积分便得以广泛的应用，尤其是在金融数学领域. 另一种与 Wick 积分基本等价的方法是通过 Mallivani 计算来定义关于分数 Brown 运动的积分为发散算子，E. Alòs 和 D. Nualart 在文章[36]和[37]中分别讨论了 Hurst 指数$1/2 < H < 1$和$0 < H < 1/2$两种情形的积分. 但是由于 Wick 乘积或 Mallivani 计算在金融市场中很难找到实际对应物予以合理解释，所以，之后很多学者对该定义的积分也提出质疑，并继续努力寻找更较为合理的分数随机积分的定义形式.

2005 年，Guy Jumarie[41]提出了具有分数阶 Riemann-Liouville 导数形式的分数阶 Maruyama 表示，并用它来近似于分数 Brown 运动. 这样，关于分数 Brown 运动的随机积分就转化成为关于分数阶导数的积分. 本文将在第四章中将使用该积分，研究 Hurst 指数$1/3 < H < 1/2$时相应的分数随机微分方程的解的存在唯一性. 以下即为该部分内容的介绍.

2.3.2 分数阶导数及关于$(dt)^{\alpha}$的积分

该部分主要是对分数阶导数的定义以及结论做一定的介绍，以下定义及引理主要引自参考文献[38][39][40][41].

定义[38]**2.3.1** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to f(x)$ 为连续函数，其α阶的**分数导数**定义为如下形式:

当α为负分数时，记为

$$D^{(\alpha)}f(x)=f^{(\alpha)}(x):=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{-\alpha-1}f(\tau)d\tau,\quad \alpha<0;$$

当α为正分数时，记为

$$D^{(\alpha)}f(x)=f^{(\alpha)}(x):=\left[f^{(\alpha-n)}\right]^{(n)},\quad n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

定义[39]**2.3.2** 令常数$h>0$，定义向前算子$FW(h)$：$FW(h).f(x):=f(x+h)$，则$f(x)$的$\alpha(0<\alpha<1)$阶**分数差分**表示为:

$$\Delta^{\alpha}f(x):=(FW-1)^{\alpha}.f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f\left(x+(\alpha-k)h\right).$$

根据上述定义，则有以下结论成立.

引理[39]**2.3.3** 下面等式成立，

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta^{\alpha}f(x)}{h^{\alpha}}.$$

下面即为分数阶 Taylor 展式.

引理[40]**2.3.4** 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to f(x)$有$k\alpha(0<\alpha<1)$阶分数导数，则其分数阶 Taylor 展式为

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)}f^{(\alpha k)}(x),\quad 0<\alpha<1.$$

其中$f^{(\alpha k)}(x)$是$f(x)$的$k\alpha$阶导数.

于是，当$0<\alpha<1$时，$f(x+h)\approx f(x)+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}f^{(\alpha)}(x)$，进而得到以下引理.

引理[40]**2.3.5** 假设 $f(x)$ 具有 α 阶的分数导数，则有下面等式成立

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}=\Gamma(1+\alpha)\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1. \tag{2.3.2}$$

在（2.3.2）式中，由于 $f^{(\alpha)}(x)=\dfrac{d^{\alpha} f(x)}{(dx)^{\alpha}}$， $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{h^{\alpha}}=\dfrac{df(x)}{(dx)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1.$

所有，可以得到 $d^{\alpha} f$ 与 df 之间的一个重要的关系式：

$$d^{\alpha} f=\Gamma(1+\alpha) f,\quad 0<\alpha<1.$$

这样，综合以上结论就可以得到关于分数阶 $(dt)^{\alpha}$ 导数的积分定义如下：

定义[41]**2.3.6** 设函数 f 为 $[0,T]\to\mathbb{R}$ 的连续函数，$x(t)$ 在 $[0,T]$ 上 α $(0<\alpha<1)$ 阶连续且在 $t=0$ 处连续，则方程 $dx(t)=f(t)(dt)^{\alpha}$，$x(0)=x_0$ 的解定义为

$$x(t)-x(0):=\int_0^t f(\tau)(d\tau)^{\alpha}=\alpha\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau,\quad 0<\alpha<1. \tag{2.3.3}$$

注：当 $f(\tau)=1$ 时，则有 $\int_0^t (d\tau)^{\alpha}=t^{\alpha}$，$0<\alpha<1.$ （2.3.4）

2.3.3 分数 Brown 运动增量的 Maruyama 表示

假设 $\omega(t)$ 是均值为 0，方差为常数 σ^2 的 Gauss 白噪声，记与其相伴的 Brown 运动为 $B(t)$. 众所周知，Brown 运动 $B(t)$ 是具有连续的路径，但是处处不可微. 然而，由于 $\omega(t)$ 的协方差函数是 $B(t)$ 协方差函数的导数，所以人们往往都将 $\omega(t)$ 视为 $B(t)$ 的“导数”，并记作 $dB(t)=\omega(t)dt$，且 $E\left[\left|dB(t)\right|^2\right]=\sigma^2 dt$. 可是，倘若采用此记法，则有 $E\left[\left|dB(t)\right|^2\right]=E\left[\left|\omega(t)dt\right|^2\right]=\sigma^2(dt)^2\neq\sigma^2 dt$，这样就产生了矛盾. 于是，为了避免这样的分歧，Maruyama 引进了一种表示（该表示在工程数学中非常有实用价值），记 $dB(t)=\omega(t)(dt)^{1/2}$，这样，$E\left[\left|dB(t)\right|^2\right]=\sigma^2 dt$. 接下来的任务就是如何使用该表示来定义当 Hurst 指数 $H\neq 1/2$ 时的分数 Brown 运动.

定义[41]**2.3.7** 设 B_t^H 是 Hurst 指数为 H，且具有 Riemann-Liouville 分数导数形式的分

数 Brown 运动. 由 Maruyama 表示 $dB(t)=\omega(t)(dt)^{1/2}$，可以推广到分数 Brown 运动增量的分数 $H(0<H<1)$ 阶 Maruyama 表示: $d\beta(t,H)=\omega(t)(dt)^{H}$, $\quad 0<H<1.$

其中，$\omega(t)$ 是一个均值为 0，方差为 σ^2 的 Gauss 白噪声.

这样由（2.3.3）式可得，$\beta(t,H)$ 具有以下表达式

$$\beta(t,H)=\int_0^t\omega(s)(ds)^{H}=H\int_0^t(t-s)^{H-1}\omega(s)ds.$$

$\beta(t,H)$ 的期望和方差分别为：$E[\beta(t,H)]=0$，$Var[\beta(t,H)]=\sigma^2 t^{2H}$. 今后采用 $\beta(t,H)$ 来逼近，甚至取代 B_t^H.

2.4 一类特殊的 FSDE 及其分数型 Itô 公式

本节首先根据属于不同区间 $(1/n,1/(n-1))$, $n=3,4,\cdots$ 的 Hurst 指数 H，通过 Taylor 展开对一类特殊 Hurst 指数下的分数随机微分方程进行改进与推广，并且这种改进使得分数随机微分方程理论更加一般化、完整化；然后对分数型 Itô 公式进行了推广.

2.4.1 一类特殊的分数随机微分方程

到目前为止，研究分数随机微分方程的学者绝大所数都是停留在以下通用形式的分数随机微分方程，

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t^H,\ \ t\in[0,T],H\in(0,1).$$

Bender C.给出了对任意的 Hurst 指数 $H\in(0,1)$ 的分数型 Itô 公式如下：

引理[42]2.4.1 设随机过程 $\{X_t=X(t),t\in[0,T]\}$ 为满足以下微分方程的分数 Itô 过程

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s^H,\qquad t\in[0,T],H\in(0,1)$$

其中函数 $\mu(t,X_t),\sigma(t,X_t)$ 为连续的，令 $y=f(t,x)$ 为连续函数，且有连续的偏导数

$\frac{\partial f}{t},\frac{\partial f}{x},\frac{\partial^2 f}{x^2}$，再令$Y_t = f\left(t, X_t\right)$，则$Y_t$也是分数 Itô 过程，并且对任意的$t\in\left[0,T\right]$满足

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(t, X_t\right)dt+\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(t, X_t\right)dB_t^H+\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(t, X_t\right)\left(dt\right)^{2H}.$$

显然，这与 Brown 运动下的 Itô 公式在形式上极为相似的. 但是这种分数 Itô 公式是通用的并不具体，因为当 Hurst 指数H属于不同的区间$\left(1/n, 1/\left(n-1\right)\right)$，$n=3,4,\cdots$时，函数的 Taylor 展开是不同的，从而相应的分数型 Itô 公式也就有所区别.

Xiao-Tian Wang 在文献[43]中提出了分数 Brown 运动下的 Taylor 展式，其假设随机过程X_t满足的分数随机微分方程为：

$$dX_t = \mu\left(t, X_t\right)dt+\sigma\left(t, X_t\right)dB_t^H,\ 1/n < H < 1/\left(n-1\right),\ n=3,4,\cdots \quad (2.4.1)$$

令函数$Y\left(t\right)=f\left(t, X_t\right)$，对$Y_t$进行 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned}Y\left(t+\Delta t\right)-Y\left(t\right) &= \left[f_t'\left(t, X_t\right)+\mu\left(t, X_t\right)f_x'\left(t, X_t\right)\right]\Delta t\\ &+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left[\sigma\left(t, X_t\right)\right]^j}{j!}f_x^{(j)}\left(t, X_t\right)\left[B_{t+\Delta t}^H-B_t^H\right]^j+o\left(\left|\Delta t\right|\right).\end{aligned} \quad (2.4.2)$$

这样，通过对比式（2.4.2）和（2.4.1）发现，可以对（2.4.1）式进行以下修正与推广：

$$dX_t = \mu\left(t, X_t\right)dt+\sigma_1\left(t, X_t\right)dB_t^H+\sigma_2\left(t, X_t\right)\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\sigma_{n-1}\left(t, X_t\right)\left(dB_t^H\right)^{n-1}$$

$$1/n < H < 1/\left(n-1\right),\ n=3,4,\cdots \quad (2.4.3)$$

当取$\sigma_j\left(t, X_t\right)=0,\ j=2,\cdots,n-1$时，可以得到（2.4.3）式到与（2.4.1）式具有相同的形式，即等式右侧都只含有一个飘移项和一个扩散项. 这样，便通过对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程进行了修正和推广，得到了更为一般化的分数随机微分方程. 本文以后所研究的分数随机微分方程都是这种改进后的形式.

下面通过一个例题来对该理论推广的合理性与否予以验证.

例[44]2.4.2 设S_t为股票的价格，Hurst 指数$H\in\left(1/3, 1/2\right)$，$S_t$的对数函数$Y_t=\ln S_t$满足如下分数随机微分方程

$$dY_t = \mu dt + \sigma dB_t^H$$

则 S_t 满足的分数随机微分方程为:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^H + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \left(dB_t^H\right)^2.$$

从上面的结论可以看出，对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程进行的改进是有意义的. 接下来，给出属于 Hurst 指数 $H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$, $n = 3, 4, \cdots$ 上的分数型 Itô 公式.

2.4.2 分数型 Itô 公式

本小节给出改进后的分数随机微分方程的更为广泛的分数型 Itô 公式如下.

定理 2.4.3 设 Hurst 指数 $H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$，随机过程 X_t 满足如下分数随机微分方程的分数 Itô 过程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma_1(t, X_t)dB_t^H + \sigma_2(t, X_t)\left(dB_t^H\right)^2 + \cdots + \sigma_{n-1}(t, X_t)\left(dB_t^H\right)^{n-1}.$$

令 $y = f(t, x)$ 为连续函数，其中 $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且 f 关于 t 的一阶偏导及关于 x 的 i $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 阶偏导数都是连续的，若令 $Y_t = f(t, X_t)$，则函数 Y_t 也是分数 Itô 过程，且满足

$$dY_t = \tilde{\mu}(t, X_t)dt + \tilde{\sigma}_1(t, X_t)dB_t^H + \tilde{\sigma}_2(t, X_t)\left(dB_t^H\right)^2 + \cdots + \tilde{\sigma}_{n-1}(t, X_t)\left(dB_t^H\right)^{n-1}. \quad (2.4.4)$$

其中，$\tilde{\mu}(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t, X_t)$，

$$\tilde{\sigma}_i(t, X_t) = \left(\sigma_i\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sum_{\substack{j_1 + j_2 = i\\ j_1, j_2 = 1, 2, \cdots, n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\sum_{\substack{j_1 + j_2 + j_3 = i\\ j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \cdots, n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3} + \cdots + \frac{\sigma_1^i}{i!}\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right)(t, X_t), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

证明 对分数 Brown 运动而言，当 Hurst 指数 $H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$ 时，由于 $dt \cdot dB_t^H$，$\left(dB_t^H\right)^m (m \geq n)$ 均为 dt 的高阶无穷小. 因此，在均方意义下约定：

$$dt \cdot dB_t^H = 0，\left(dB_t^H\right)^m = 0, (m \geq n).$$

为证明简便起见，以下证明过程中简记$\mu=\mu(t,X_t)$，$\sigma_i=\sigma_i(t,X_t)$，$i=1,2,\cdots,n-1$.

首先，根据题意可得

$$(dX_t)^2=\left[\mu dt+\sigma_1 dB_t^H+\sigma_2(dB_t^H)^2+\cdots+\sigma_{n-1}(dB_t^H)^{n-1}\right]^2$$
$$=\sigma_1^2(dB_t^H)^2+(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1)(dB_t^H)^3+(\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_3\sigma_1)(dB_t^H)^4+\cdots$$
$$+\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}(dB_t^H)^{n-1}$$
$$=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\substack{j_1+j_2=i\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}(dB_t^H)^i.$$

同理可递推得到，对任意的$k=3,4,\cdots,n-1$，有

$$(dX_t)^k=\left[\mu dt+\sigma_1 dB_t^H+\sigma_2(dB_t^H)^2+\cdots+\sigma_{n-1}(dB_t^H)^{n-1}\right]^k$$
$$=\sum_{i=k}^{n-1}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_k=i\\ j_1,j_2,\cdots,j_k=1,2,\cdots,n-1.}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\cdots\sigma_{j_k}(dB_t^H)^i.$$

然后，对函数$Y_t=f(t,X_t)$进行 Taylor 展开得

$$dY_t$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial x}dX_t+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dX_t)^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(dX_t)^{n-1}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial x}\left[\mu dt+\sigma_1 dB_t^H+\cdots+\sigma_{n-1}(dB_t^H)^{n-1}\right]+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\substack{j_1+j_2=i\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}(dB_t^H)^i$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\sum_{i=3}^{n-1}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=i\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}(dB_t^H)^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\sigma_1^{n-1}(dB_t^H)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}\right)dt+\sigma_1\frac{\partial f}{\partial x}dB_t^H+\left(\sigma_2\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma_1^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(dB_t^H)^2+\cdots+\left(\sigma_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\sigma_1^{n-1}\right)(dB_t^H)^{n-1}$$

$$=\widetilde{\mu}\left(t,X_t\right)dt+\widetilde{\sigma}_1\left(t,X_t\right)dB_t^H+\widetilde{\sigma}_2\left(t,X_t\right)\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\widetilde{\sigma}_{n-1}\left(t,X_t\right)\left(dB_t^H\right)^{n-1}.$$

证毕□

这样，根据 Hurst 指数 H 属于的不同区间 $\left(1/n,1/(n-1)\right)$，$n=3,4,\cdots$，本节对分数随机微分方程进行了更为一般的改进和推广，并且推导出了改进后的分数型 Itô 公式.

2.5 本章小结

随着金融市场的日益壮大，在证券市场上，股票价格的波动表现为“有偏的随机游走”而非随机游走；股票价格收益率是呈“尖峰厚尾”的分布，而非正态分布. 这种与基于 Brown 运动的有效市场假说相矛盾的理论，称为分形市场假说理论. 由于分数 Brown 运动的自相似性和长期记忆性恰好与分形市场中的分形现象相吻合. 所以，分数 Brown 运动逐渐成为研究分形市场的强有力工具.

本章旨在介绍分数 Brown 运动的有关知识，主要研究了四部分内容：首先，给出了概率论的相关理论知识；其次，给出了分数 Brown 运动的定义及其性质；再次，对关于分数 Brown 运动的随机积分、分数阶导数和积分以及分数阶 Maruyama 表示等做了有关介绍；最后，对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程以及分数型 Itô 公式进行了修正与推广，得到了新形式下的分数随机微分方程及其分数型 Itô 公式.

3　分数线性随机微分方程的一般解

线性微分方程是微分方程的最基本，也是最常用的重要内容之一，它在各个领域有着广泛的应用. 本章主要研究的是改进后且更为一般化的分数线性随机微分方程的有关理论，主要包括三部分：3.1 节概述了分数线性随机微分方程的研究现状；3.2 节给出 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时分数线性随机微分方程的一般解，并对其特殊情况予以讨论；3.3 节推广了 Hurst 指数 $H\in(1/n,1/(n-1))$ 时，分数线性随机微分方程的一般解.

3.1　引言

线性随机微分方程在金融数学中有着广泛的应用，因为在金融市场上股票的价格和波动率通常满足线性随机微分方程. 随着分形市场的出现，分数 Brown 运动势必将会取代 Brown 运动. 于是，分数线性随机微分方程也逐渐引起了许多学者的密切关注和研究. 当然在金融领域中最为学者所关注的便是如下形式方程（几何分数 Brown 运动）：

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dB_t^H,\quad X_0=Z(\omega),t\in[0,T],H\in(0,1).\qquad（3.1.1）$$

的一般解.

Yao Zhong Hu, B. Øksendal 在文献[33]中利用 Wick 积分给出了当 Hurst 指数 $1/2<H<1$ 时，方程（3.1.1）的解为

$$X_t=X_0\exp\left(\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2H}+\sigma B_t^H\right).$$

Thao(2006)在文献[45]中通过使用半鞅 B_t^ε 来逼近分数 Brown 运动 B_t^H，以及用分部积分法定义新的关于分数 Brown 运动的随机积分的方法，证明了当 Hurst 指数 $1/2<H<1$ 时，方程（3.1.1）的解为

$$X_t=X_0\exp\left(\mu t+\sigma B_t^H\right).$$

王子亭(2009)在[46]中利用分数阶导数得到了如下分数线性随机微分方程

$$dX_t=\left[\mu_1(t)X_t+\mu_2(t)\right]dt+\left[\sigma_1(t)X_t+\sigma_2(t)\right]dB_t^H，\ X_{t=0}=X_0,0<H<1 \quad (3.1.2)$$

的一般解.

以上涉及到的线性随机微分方程都有一个共同点，即方程的右端仅有两项（漂移项和扩散项）. 基于第二章对分数随机微分方程的改进与推广，本章首先研究的是 Hurst 指数 $1/3<H<1/2$ 时，满足初值条件 $X_{t=0}=X_0$ 的如下分数线性随机微分方程：

$$dX_t=\left[\mu_1(t)X_t+\mu_2(t)\right]dt+\left[\sigma_1(t)X_t+\sigma_2(t)\right]dB_t^H+\left[\gamma_1(t)X_t+\gamma_2(t)\right]\left(dB_t^H\right)^2$$

的一般解. 该方程是对（3.1.2）式进行的改进，其右端含有三项，即一个漂移项和两个扩散项. 以下为具体内容.

3.2 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时线性 FSDE 的一般解

本节的主要任务就是给出更为一般化的分数线性随机微分方程的一般解，首先证明如下引理.

引理 3.2.1 设 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$，随机过程 $\left\{X_i=X_i(t),t\in[0,T],i=1,2\right\}$ 满足如下分数随机微分方程:

$$dX_i=\mu_i(t,X_i)dt+\sigma_i(t,X_i)dB_t^H+\gamma_i(t,X_i)\left(dB_t^H\right)^2,\ i=1,2. \quad (3.2.1)$$

若令 $Y_t=X_1X_2$，则 Y_t 满足分数随机微分方程

$$dY_t=\left(\mu_1X_2+\mu_2X_1\right)dt+\left(\sigma_1X_2+\sigma_2X_1\right)dB_t^H+\left(\gamma_1X_2+\gamma_2X_1+\sigma_1\sigma_2\right)\left(dB_t^H\right)^2. \quad (3.2.2)$$

证明 为证明方便起见，简记 $\mu_i=\mu_i(t,X_i),\sigma_i=\sigma_i(t,X_i),\gamma_i=\gamma_i(t,X_i),\ i=1,2.$ 令函数 $y=f(t,x_1,x_2)=x_1x_2$，则 $f_t=0,\ f_{x_1}=x_2,\ f_{x_2}=x_1,\ f_{x_1x_2}=1,\ f_{x_1x_1}=f_{x_2x_2}=0$，且均为连续的.

则对 $Y_t=X_1X_2$ 进行 Taylor 展开可得

$$dY_t=d\left(X_1X_2\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial x_1}dX_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dX_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}dt+\frac{\partial}{\partial x_1}dX_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dX_2\right)^2 f$$

$$=f_t dt+f_{x_1}dX_1+f_{x_2}dX_2+\frac{1}{2}\left[f_{x_1x_1}\left(dX_1\right)^2+2f_{x_1x_2}dX_1dX_2+f_{x_2x_2}\left(dX_2\right)^2\right]$$

$$=X_2dX_1+X_2dX_2+dX_1dX_2.$$

将（3.2.1）代入上式，整理即得

$$dY_t=\left(\mu_1X_2+\mu_2X_1\right)dt+\left(\sigma_1X_2+\sigma_2X_1\right)dB_t^H+\left(\gamma_1X_2+\gamma_2X_1+\sigma_1\sigma_2\right)\left(dB_t^H\right)^2.$$

证毕□

接下来，给出 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时，分数线性随机微分方程的一般解.

定理 3.2.2 设 $\{X_t=X(t),t\in[0,T]\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，若对任意的 $t\in[0,T]$，X_t 满足以下微分方程:

$$\begin{cases}X_0=Z(\omega),\\ dX_t=\left[\mu_1(t)X_t+\mu_2(t)\right]dt+\left[\sigma_1(t)X_t+\sigma_2(t)\right]dB_t^H+\left[\gamma_1(t)X_t+\gamma_2(t)\right]\left(dB_t^H\right)^2.\end{cases}\quad(3.2.3)$$

其中，函数 $\mu_i(t),\sigma_i(t),\gamma_i(t),(i=1,2)$ 均为 $[0,T]$ 上的可测函数，B_t^H 为 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 的分数 Brown 运动，且 $B_t^H\sim N\left(0,\sigma^2t^{2H}\right)$. 则形如（3.2.3）式的分数线性随机微分方程具有如下形式的一般解:

$$X_t=\rho(t)\left[1+\int_0^t\mu_2(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\sigma_2(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H+\int_0^t\left[\gamma_2(s)-\sigma_1(s)\sigma_2(s)\right]\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2\right].$$

其中，$\rho(t)=X_0\cdot\exp\left[\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2\right].$

证明 该定理将分为以下三个步骤予以证明：首先求解方程（3.2.3）相应的齐次分数线性随机微分方程的基本解 $\rho(t)$，然后求得随机过程 $\rho^{-1}(t)$ 满足的随机微分方程，最后求得 $\rho^{-1}(t)X_t$ 的微分表达式，积分整理即得方程（3.2.3）的一般解 X_t.

（i）求齐次线性随机微分方程的基本解 $\rho(t)$.

在（3.2.3）式中令 $\mu_2(t)=\sigma_2(t)=\gamma_2(t)=0$，则原方程化为齐次分数线性随机微

分方程：

$$dX_t=\mu_1(t)X_t dt+\sigma_1(t)X_t dB_t^H+\gamma_1(t)X_t\left(dB_t^H\right)^2. \quad (3.2.4)$$

令函数 $y=g(t,x)=\ln x$，则有 $g_t=0, g_x=\frac{1}{x}, g_{xx}=-\frac{1}{x^2}$. 再令 $Y_t=\ln X_t$，则根据分数型 Itô 公式（2.4.4）式可得

$$\begin{aligned}dY_t&=\left[g_t+\mu_1(t)X_t g_x\right]dt+\sigma_1(t)X_t g_x dB_t^H+\left(\gamma_1(t)X_t g_x+\frac{1}{2}\sigma_1^2(t)X_t^2 g_{xx}\right)\left(dB_t^H\right)^2\\&=\mu_1(t)dt+\sigma_1(t)dB_t^H+\left(\gamma_1(t)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t)\right)\left(dB_t^H\right)^2. \quad (3.2.5)\end{aligned}$$

对（3.2.5）式两边分别从 0 到 t 积分可得

$$\ln X_t-\ln X_0=\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2$$

即得 $$X_t=X_0\cdot\exp\left[\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2\right].$$

记 $$\rho(t)=X_0\cdot\exp\left[\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2\right] \quad (3.2.6)$$

则 $\rho(t)$ 为方程（3.2.4）的基本解，即 $\rho(t)$ 满足方程：

$$d\rho(t)=\mu_1(t)\rho(t)dt+\sigma_1(t)\rho(t)dB_t^H+\gamma_1(t)\rho(t)\left(dB_t^H\right)^2. \quad (3.2.7)$$

（ii）求随机过程 $\rho^{-1}(t)$ 满足的随机微分方程.

令函数 $z=z(t,x)=x^{-1}$，则 $z_t=0, z_x=-\frac{1}{x^2}, z_{xx}=\frac{2}{x^3}$. 再令 $Z(t)=\rho^{-1}(t)$，由分数型 Itô 公式（2.4.4）式得

$$\begin{aligned}&d\rho^{-1}(t)\\&=\left[z_t+\mu_1(t)\rho(t)z_x\right]dt+\sigma_1(t)\rho(t)z_x dB_t^H+\left[\gamma_1(t)\rho(t)z_x+\frac{1}{2}\sigma_1^2(t)\rho^2(t)z_{xx}\right]\left(dB_t^H\right)^2\\&=-\mu_1(t)\rho^{-1}(t)dt-\sigma_1(t)\rho^{-1}(t)dB_t^H+\left[\sigma_1^2(t)-\gamma_1(t)\right]\rho^{-1}(t)\left(dB_t^H\right)^2 . \quad (3.2.8)\end{aligned}$$

（iii）求分数线性随机微分方程的一般解 X_t.

利用引理 3.2.1，联立（3.2.3）（3.2.8）两式整理可得

$$d\left(\rho^{-1}(t)X_t\right)=\mu_2(t)\rho^{-1}(t)dt+\sigma_2(t)\rho^{-1}(t)dB_t^H+\left[\gamma_2(t)-\sigma_1(t)\sigma_2(t)\right]\rho^{-1}(t)\left(dB_t^H\right)^2.$$

对上式两边分别从 0 到 t 积分可得

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(t)X_t-\rho^{-1}(0)X_0=&\int_0^t\mu_2(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\sigma_2(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H\\&+\int_0^t\left[\gamma_2(s)-\sigma_1(s)\sigma_2(s)\right]\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2.\end{aligned}$$

而 $\rho(0)=X_0$，故整理可得

$$\begin{aligned}X_t=\rho(t)\Big[1&+\int_0^t\mu_2(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\sigma_2(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H\\&+\int_0^t\left[\gamma_2(s)-\sigma_1(s)\sigma_2(s)\right]\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2\Big].\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

其中，$\rho(t)=X_0\cdot\exp\left[\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2\right].$

证毕□

在求得 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时，分数线性随机微分方程的一般解后. 接下来，对方程（3.2.3）的特殊形式略加分析，可得到以下推论.

推论 3.2.3 假设 $\mu_2(t)=\sigma_2(t)=\gamma_2(t)=0$，则分数线性随机微分方程（3.2.3）即变为齐次分数线性随机微分方程（3.2.4），也就是几何分数 Brown 运动的微分方程表达形式. 根据一般解（3.2.9）式，可得方程（3.2.3）解为：

$$X_t=X_0\cdot\exp\left[\int_0^t\mu_1(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\gamma_1(s)-\frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right)\left(dB_s^H\right)^2\right]\tag{3.2.10}$$

这与证明过程（i）中得到的结论相符.

特殊情形下，假设 $\mu_1(t)=\mu,\sigma_1(t)=\sigma,\gamma_1(t)=\gamma$（$\mu,\sigma,\gamma$ 为常数），则方程（3.2.3）变为：

$$dX_t=\mu_1X_tdt+\sigma_1X_tdB_t^H+\gamma_1X_t\left(dB_t^H\right)^2.\tag{3.2.11}$$

由（3.2.10）式得，其解为：

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left[\mu_1 t + \sigma_1 B_t^H + \left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\int_0^t \left(dB_s^H\right)^2\right]$$

Guy Jumarie[47]指出，在不失一般意义前提下，可以用$\left(dB_s^H\right)^2$的期望值$\sigma^2\left(ds\right)^{2H}$来取而代之，这样就得到

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left[\mu_1 t + \sigma_1 B_t^H + \left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\int_0^t \sigma^2\left(ds\right)^{2H}\right].$$

再根据（2.3.4）式即得

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left[\mu_1 t + \sigma_1 B_t^H + \left(\gamma - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)\sigma^2 t^{2H}\right].$$

当$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$时，即为[45]的结论. 因此，该结果改进了[45]关于线性 FSDE 的一般解的结论. 下面将继续对线性 FSDE 作更一般的推广，得到 Hurst 指数$H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$时，线性 FSDE 的一般解.

3.3 Hurst 指数 $H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$ 时线性 FSDE 的一般解

在给出 Hurst 指数$H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$时，线性 FSDE 的一般解之前，需要证明以下引理.

引理3.3.1 设Hurst指数$H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$，随机过程$\left\{X_i = X_i(t), t \in [0,T], i = 1,2\right\}$满足如下分数随机微分方程:

$$dX_i = \mu_i(t, X_i)dt + \sigma_{i1}(t, X_i)dB_t^H + \sigma_{i2}(t, X_i)\left(dB_t^H\right)^2 + \cdots + \sigma_{i(n-1)}(t, X_i)\left(dB_t^H\right)^{n-1},\ i = 1,2. \tag{3.3.1}$$

若令$Y_t = X_1 X_2$，则Y_t满足分数随机微分方程

$$dY_t = \left(\mu_1 X_2 + \mu_2 X_1\right)dt + \left(\sigma_{11} X_2 + \sigma_{21} X_1\right)dB_t^H + \left(\sigma_{12} X_2 + \sigma_{22} X_1 + \sigma_{11}\sigma_{21}\right)\left(dB_t^H\right)^2 + \cdots + \left(\sigma_{1(n-1)} X_2 + \sigma_{2(n-1)} X_1 + \cdots + \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j=1,2,\cdots,n-1}} \sigma_{1i}\sigma_{2j}\right)\left(dB_t^H\right)^{n-1}. \tag{3.3.2}$$

证明 为证明方便起见，以下简记

$$\mu_i=\mu_i\left(t,X_i\right),\sigma_{ij}=\sigma_{ij}\left(t,X_i\right),\ i=1,2,\ \ j=1,2,\cdots,n-1.$$

令函数 $y=f\left(t,x_1,x_2\right)=x_1x_2$，则 $f_t=0,\ f_{x_1}=x_2,\ f_{x_2}=x_1,\ f_{x_1x_2}=1,\ f_{x_1x_1}=f_{x_2x_2}=0$，且均为连续的.

则对 $Y_t=X_1X_2$ 进行 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}dY_t&=d\left(X_1X_2\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial x_1}dX_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dX_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}dt+\frac{\partial}{\partial x_1}dX_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dX_2\right)^2 f\\&=f_tdt+f_{x_1}dX_1+f_{x_2}dX_2+\frac{1}{2}\left[f_{x_1x_1}\left(dX_1\right)^2+2f_{x_1x_2}dX_1dX_2+f_{x_2x_2}\left(dX_2\right)^2\right]\\&=X_2dX_1+X_2dX_2+dX_1dX_2.\end{aligned}$$

将（3.3.1）代入上式，整理即得

$$\begin{aligned}dY_t=&\left(\mu_1X_2+\mu_2X_1\right)dt+\left(\sigma_{11}X_2+\sigma_{21}X_1\right)dB_t^H+\left(\sigma_{12}X_2+\sigma_{22}X_1+\sigma_{11}\sigma_{21}\right)\left(dB_t^H\right)^2\\&+\cdots+\left(\sigma_{1(n-1)}X_2+\sigma_{2(n-1)}X_1+\cdots+\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\right)\left(dB_t^H\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

证毕□

接下来，给出 Hurst 指数 $H\in\left(1/n,1/(n-1)\right)$ 时，线性 FSDE 的一般解.

定理 3.3.2 设 $\left\{X_t=X\left(t\right),t\in\left[0,T\right]\right\}$ 为定义在概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ 上的随机过程，若对任意的 $t\in\left[0,T\right]$，X_t 满足以下微分方程:

$$\begin{cases}X_0=Z\left(\omega\right),\\dX_t=\left[\mu\left(t\right)X_t+\widehat{\mu}\left(t\right)\right]dt+\left[\sigma_1\left(t\right)X_t+\widehat{\sigma}_1\left(t\right)\right]dB_t^H+\left[\sigma_2\left(t\right)X_t+\widehat{\sigma}_2\left(t\right)\right]\left(dB_t^H\right)^2\\\qquad+\cdots+\left[\sigma_{n-1}\left(t\right)X_t+\widehat{\sigma}_{n-1}\left(t\right)\right]\left(dB_t^H\right)^{n-1}.\end{cases}\quad(3.3.3)$$

其中，函数 $\mu(t),\widehat{\mu}(t),\sigma_i(t),\widehat{\sigma}_i(t),\ i=1,2,\cdots,n-1$ 均为 $\left[0,T\right]$ 上的可测函数，B_t^H 为 Hurst 指数 $H\in\left(1/n,1/(n-1)\right)$ 的分数 Brown 运动. 则形如（3.3.3）式的分数线性随机微分方程具有如下形式的一般解:

$$X_t=\rho(t)\cdot\Big\{1+\int_0^t\hat{\mu}(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\hat{\sigma}_1(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H+\int_0^t\Big[\hat{\sigma}_2(s)+\hat{\sigma}_1(s)\gamma_1(s)\Big]$$

$$\times\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots+\int_0^t\left(\hat{\sigma}_{n-1}(s)+\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j=1,2,\cdots,n-1}}\hat{\sigma}_i(s)\gamma_j(s)\right)\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}\Big\}.$$

其中,

$$\rho(t)=X_0\cdot\exp\Bigg[\int_0^t\mu(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(s)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots+\int_0^t\Big(\sigma_{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\sigma_1^{n-1}\Big)(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}\Bigg].$$

证明 该定理同样分为以下三个步骤予以证明:首先求解方程(3.3.3)相应的齐次分数线性随机微分方程的基本解$\rho(t)$,然后求得随机过程$\rho^{-1}(t)$满足的随机微分方程,最后求得$\rho^{-1}(t)X_t$的微分表达式,并积分整理得到方程(3.3.3)的一般解X_t.

为证明方便,以下简记

$$\mu=\mu(t),\hat{\mu}=\hat{\mu}(t),\rho=\rho(t),\sigma_i=\sigma_i(t),\hat{\sigma}_i=\hat{\sigma}_i(t),i=1,2,\cdots,n-1.$$

(i)求齐次线性随机微分方程的基本解$\rho(t)$.

在(3.3.3)式中令$\mu=\hat{\sigma}_i=0\,(i=1,2,\cdots,n-1)$,则原方程化为齐次分数线性随机微分方程:

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma_1X_tdB_t^H+\sigma_2X_t\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\sigma_{n-1}X_t\left(dB_t^H\right)^{n-1}\qquad(3.3.4)$$

令函数$y=g(t,x)=\ln x$,则有$\frac{\partial g}{\partial t}=0,\ \frac{\partial^i g}{\partial x^i}=(-1)^{i+1}\frac{(i-1)!}{x^i},i=1,2,\cdots,n-1.$

再令$Y_t=\ln X_t$,则根据分数型 Itô 公式(2.4.4)式可得

$$dY_t=\mu dt+\sigma_1dB_t^H+\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\Bigg(\sigma_{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\sigma_1^{n-1}\Bigg)\left(dB_t^H\right)^{n-1}. \tag{3.3.5}$$

对（3.3.5）式两边分别从0到t积分可得

$$\ln\frac{X_t}{X_0}=\int_0^t\mu ds+\int_0^t\sigma_1 dB_s^H+\int_0^t\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots$$

$$+\int_0^t\left(\sigma_{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\sigma_1^{n-1}\right)\left(dB_s^H\right)^{n-1}.$$

整理即得

$$X_t=X_0\cdot\exp\Bigg[\int_0^t\mu(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(s)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots+\int_0^t\Bigg(\sigma_{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\sigma_1^{n-1}\Bigg)(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}\Bigg].$$

记

$$\rho(t)=X_0\cdot\exp\Bigg[\int_0^t\mu(s)ds+\int_0^t\sigma_1(s)dB_s^H+\int_0^t\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(s)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots+\int_0^t\Bigg(\sigma_{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\sigma_1^{n-1}\Bigg)(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}\Bigg]. \tag{3.3.6}$$

则$\rho(t)$为方程（3.3.4）的基本解，即$\rho(t)$满足方程：

$$d\rho(t)=\mu(t)\rho(t)dt+\sigma_1(t)\rho(t)dB_t^H+\sigma_2(t)\rho(t)\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\sigma_{n-1}(t)\rho(t)\left(dB_t^H\right)^{n-1}$$

（ii）求随机过程$\rho^{-1}(t)$满足的随机微分方程.

令函数$z=z(t,x)=x^{-1}$，则$\frac{\partial z}{\partial t}=0,\frac{\partial^i z}{\partial x^i}=(-1)^i\frac{i!}{x^{i+1}},i=1,2,\cdots,n-1$.

再令$Z(t)=\rho^{-1}(t)$，由分数型 Itô 公式（2.4.4）式得

$$d\rho^{-1}(t)=-\mu\rho^{-1}dt-\sigma_1\rho^{-1}dB_t^H+\left(\sigma_1^2-\sigma_2\right)\rho^{-1}\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\left(-\sigma_{n-1}+\sum_{\substack{j_1+j_2=n-1\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_1^{n-1}\right)\rho^{-1}\left(dB_t^H\right)^{n-1} \qquad (3.3.7)$$

$$\triangleq -\mu\rho^{-1}dt+\gamma_1\rho^{-1}dB_t^H+\gamma_2\rho^{-1}\left(dB_t^H\right)^2+\cdots+\gamma_{n-1}\rho^{-1}\left(dB_t^H\right)^{n-1}.$$

其中，$\gamma_1=-\sigma_1$,

$$\gamma_i=-\sigma_i+\sum_{\substack{j_1+j_2=i\\ j_1,j_2=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}-\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=i\\ j_1,j_2,j_3=1,2,\cdots,n-1}}\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}+\cdots+(-1)^i\sigma_1^i,\ i=2,3,\cdots,n-1.$$

（iii）求分数线性随机微分方程（3.3.3）的一般解 X_t.

利用引理 3.3.1，联立（3.3.3）（3.3.7）两式整理可得

$$d\left(\rho^{-1}(t)X_t\right)=\hat{\mu}(t)\rho^{-1}(t)dt+\hat{\sigma}_1(t)\rho^{-1}(t)dB_t^H+\left[\hat{\sigma}_2(t)+\hat{\sigma}_1(t)\gamma_1(t)\right]\rho^{-1}(t)\left(dB_t^H\right)^2$$

$$+\cdots+\left(\hat{\sigma}_{n-1}(t)+\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j=1,2,\cdots,n-1}}\hat{\sigma}_i(t)\gamma_j(t)\right)\rho^{-1}(t)\left(dB_t^H\right)^{n-1}.$$

对上式两边分别从0到t积分可得

$$\rho^{-1}(t)X_t-\rho^{-1}(0)X_0$$

$$=\int_0^t\hat{\mu}(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\hat{\sigma}_1(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H+\int_0^t\left[\hat{\sigma}_2(s)+\hat{\sigma}_1(s)\gamma_1(s)\right]\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2$$

$$+\cdots+\int_0^t\left(\hat{\sigma}_{n-1}(s)+\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j=1,2,\cdots,n-1}}\hat{\sigma}_i(s)\gamma_j(s)\right)\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}.$$

而$\rho(0)=X_0$，故整理可得

$$X_t=\rho(t)\cdot\left\{1+\int_0^t\hat{\mu}(s)\rho^{-1}(s)ds+\int_0^t\hat{\sigma}_1(s)\rho^{-1}(s)dB_s^H+\int_0^t\left[\hat{\sigma}_2(s)+\hat{\sigma}_1(s)\gamma_1(s)\right]\right.$$

$$\left.\times\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^2+\cdots+\int_0^t\left(\hat{\sigma}_{n-1}(s)+\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j=1,2,\cdots,n-1}}\hat{\sigma}_i(s)\gamma_j(s)\right)\rho^{-1}(s)\left(dB_s^H\right)^{n-1}\right\}.$$

其中，$\rho(t)$为（3.3.6）式. 证毕□

这样，对于任意的 Hurst 指数$H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right), n = 2, 3, \cdots$，本定理给出了分数线性随机微分方程的一般解.

3.4 本章小结

在分形金融市场上，分数随机微分方程是研究各类期权定价问题的必备数学理论，而通常期权的标的资产的价格或波动率都是满足线性随机微分方程. 因此，研究分数线性随机微分方程的一般解也变得尤为重要.

本章主要研究了分数线性随机微分方程的一般解. 首先，概述了分数线性随机微分方程的研究现状，并给出了当 Hurst 指数$1/3 < H < 1/2$时更为一般化的分数线性随机微分方程；然后，给出了 Hurst 指数$1/3 < H < 1/2$时分数线性随机微分方程的一般解，并对其特殊情形略以分析；最后，对分数线性随机微分方程的一般解推广到了 Hurst 指数$H \in \left(1/n, 1/(n-1)\right)$时的情形.

4 分数随机微分方程解的存在唯一性

对于一些特殊的分数随机微分方程，能够比较容易地得到其一般解，但是对于形式比较一般的大多数分数随机微分方程而言，确定其解的存在性、唯一性甚至其解析解往往都是比较艰难的. 基于此，本章给出了分数随机微分方程解的存在唯一性定理. 主要分为以下四部分：4.1 节对基于分数阶 Maruyama 表示的 FSDE 作以简单介绍；4.2 节界定了 FSDE 解的基本概念；4.3 节给出了 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时，FSDE 解的存在唯一性定理及其证明；4.4 节对 FSDE 的近似解与真实解进行了误差估计.

4.1 基于分数阶 Maruyama 表示的 FSDE

关于分数随机微分方程解的存在唯一性的国内外研究现状在第一章中已给予详细概述，其中指出：当 Hurst 指数 $1/2<H<1$ 时，很多学者都已经给出了分数随机微分方程解的存在唯一性定理及其证明；但当 Hurst 指数 $0<H<1/2$ 时，理论成果较少. 这是由于分数 Brown 运动具有反持久效应，相比于 Brown 运动，分数 Brown 运动波动得更加剧烈.

Hurst 指数 $1/3<H<1/2$ 时，考虑如下形式的分数随机微分方程为：

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t)dB_t^H+\gamma(t,X_t)\left(dB_t^H\right)^2，初值条件 X_0=Z(\omega). \qquad (4.1.1)$$

欲研究方程（4.1.1）解的存在唯一性，即只需要研究与其同解的积分方程

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s)dB_s^H+\int_0^t\gamma(s,X_s)\left(dB_s^H\right)^2. \qquad (4.1.2)$$

解的存在唯一性. 为了解决该问题，本文采用了 Guy Jumarie 在[42]中提到的分数 Brown 运动增量的分数阶 Maruyama 表示来近似取代原始分数 Brown 运动，这样积分方程（4.1.2）变为：

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s)d\beta_1(s,H)+\int_0^t\gamma(s,X_s)d\beta_2(s,2H). \qquad (4.1.3)$$

基于第二章中介绍的推广了的的分数随机微分方程理论，本章研究的对象是：

当 Hurst 指数 $H\in(1/3,1/2)$ 时，满足如下形式的基于分数阶 Maruyama 表示的分数随机微分方程（以下简称分数随机微分方程）的随机过程 $\{X_t = X(t), t\in[0,T]\}$：

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t)d\beta_1(t,H) + \gamma(t,X_t)d\beta_2(t,2H),\quad t\in[0,T] \tag{4.1.4}$$

初值条件为 $X_0 = Z(\omega)$. 其中，$\mu(t,X_t),\gamma(t,X_t)$ 是 $[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的可测函数，$\sigma(t)$ 是 $[0,T]\to\mathbb{R}$ 的可测函数，

$$d\beta_1(t,H) = \omega_1(t)(dt)^H,\quad \omega_1(t)\sim N(0,\sigma_1^2), \tag{4.1.5}$$

$$d\beta_2(t,2H) = \omega_2(t)(dt)^{2H},\quad \omega_2(t)\sim N(0,\sigma_2^2). \tag{4.1.6}$$

对于定义于（4.1.4）形式的分数随机微分方程，本章将给出其解的存在唯一性定理.

4.2 分数随机微分方程解的基本概念

为了研究分数随机微分方程的强解，首先定义（4.1.4）的强解以及强解的唯一性等概念.

定义 4.2.1 在给定的赋流概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 中，其中 $\{\mathcal{F}_t : t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上给定的 σ 代数流，且给定的 $\beta_1(t,H)$ 和 $\beta_2(t,2H)$ 与 $\mathcal{F}_t$ 相适应的. 若存在随机过程 $\{X_t = X(t), t\in[0,T]\}$ 满足以下条件:

（i） X_t 是与 $\mathcal{F}_t$ 相适应的连续过程;

（ii）函数 $|\mu(t,X_t)|^{1/2},\sigma(t),\gamma(t,X_t)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R})$，即均方可积;

（iii） X_t 满足如下形式的随机积分方程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s)d\beta_1(s,H) + \int_0^t \gamma(s,X_s)d\beta_2(s,2H),\ t\in[0,T]. \tag{4.2.1}$$

则称 X_t 为方程（4.1.4）的具有初值 X_0 的**强解**.

接下来定义了方程强解的唯一性，即指轨道唯一性.

定义 4.2.2 如果对于固定的赋流概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 及与 $\mathcal{F}_t$ 相适应的过程 $\beta_1(t,H)$

和$\beta_2(t,2H)$，方程（4.1.4）的强解X_t被初值$X_0=Z(\omega)$唯一确定，称方程（4.1.4）的强解具有**轨道唯一性**. 也就是说，假设X_t和Y_t均为方程的强解，且满足初值条件$X_0=Y_0=Z(\omega)$，则$P\{X_t=Y_t,\forall t\in[0,T]\}=1$，即$X_t$与$Y_t$随机等价，轨道无差别.

在定义了分数随机微分方程（4.1.4）的强解以及强解的轨道唯一性等概念后，就可以研究强解的存在唯一性.

4.3 分数随机微分方程解的存在唯一性

本节主要采用 Picard 逐步逼近的方法给出了分数随机微分方程（4.1.4）强解的存在唯一性的一般性证明，最后并讨论了方程的近似解与真实解之间的误差估计. 首先给出以下引理.

引理 4.3.1 设$\{X_t,t\in[0,T]\}$为定义在赋流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$上的随机过程，函数$f(t,X_t)$是$[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的可测函数，且$f(t,X_t)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R})$，$d\beta_1(t,H)$与$d\beta_2(t,2H)$为（4.1.5）（4.1.6）式所定义，则有

$$E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)d\beta_1(s,H)\right|^2\right]=4\sigma_1^2H^2\cdot E\left[\int_0^t f^2(s,X_s)(t-s)^{2H-1}ds\right],\qquad(4.3.1)$$

$$E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]=16\sigma_2^2H^2\cdot E\left[\int_0^t f^2(s,X_s)(t-s)^{4H-1}ds\right].\qquad(4.3.2)$$

证明 由 Maruyama 表示，可设$dB_1(t):=\omega_1(t)(dt)^{1/2}$，$dB_2(t):=\omega_2(t)(dt)^{1/2}$，其中$B_1(t)$和$B_2(t)$是 Brown 运动，$\omega_1(t)\sim N(0,\sigma_1^2)$，$\omega_2(t)\sim N(0,\sigma_2^2)$，则有

$$E\left[(dB_1(t))^2\right]=E\left[\left|\omega_1(t)(dt)^{1/2}\right|^2\right]=\sigma_1^2dt,\quad E\left[(dB_2(t))^2\right]=E\left[\left|\omega_2(t)(dt)^{1/2}\right|^2\right]=\sigma_2^2dt.$$

根据分数阶 Maruyama 表示$d\beta_1(t,H)=\omega_1(t)(dt)^H$以及 Maruyama 表示$dB_1(t)=\omega_1(t)(dt)^{1/2}$，利用定义 2.3.6 中（2.3.3）式可得

$$E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)d\beta_1(s,H)\right|^2\right]=E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)\omega_1(s)(ds)^H\right|^2\right]$$

$$= E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)H\omega_1(s)(t-s)^{H-1}ds\right|^2\right]$$

$$= E\left[\left|\int_0^t 2H\cdot f(s,X_s)(t-s)^{H-1/2}\left[\frac{1}{2}\omega_1(s)(t-s)^{-1/2}ds\right]\right|^2\right]$$

$$= 4H^2\cdot E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)(t-s)^{H-1/2}\left[\omega_1(s)(ds)^{1/2}\right]\right|^2\right]$$

$$= 4H^2\cdot E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)(t-s)^{H-1/2}dB_1(s)\right|^2\right].$$

由等距性可得

$$E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)(t-s)^{H-1/2}dB_1(s)\right|^2\right] = \sigma_1^2 E\left[\int_0^t f^2(s,X_s)(t-s)^{2H-1}ds\right].$$

故有（4.3.1）式成立.

同理可证，

$$E\left[\left|\int_0^t f(s,X_s)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right] = 16\sigma_2^2 H^2\cdot E\left[\int_0^t f^2(s,X_s)(t-s)^{4H-1}ds\right].$$ 证毕□

基于以上的概念和引理，接下来给出分数随机微分方程强解的存在唯一性定理.

定理 4.3.2（解的存在唯一性）

若分数随机微分方程（4.1.4）的系数 $\mu(t,X_t),\sigma(t),\gamma(t,X_t)$ 满足以下条件:

（i）函数 $\left|\mu(t,X_t)\right|^{1/2},\sigma(t),\gamma(t,X_t)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R})$；

（ii）存在某常数 $c,d,h>0$，对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，有

(a) 一致 Lipschitz 条件

$$\left|\mu(t,x)-\mu(t,y)\right|^2+\left|\gamma(t,x)-\gamma(t,y)\right|^2\le c\left|x-y\right|^2; \quad (4.3.3)$$

(b) 线性增长条件

$$\left|\mu(t,x)\right|^2+\left|\gamma(t,x)\right|^2\le d\left|1+x^2\right|; \quad (4.3.4)$$

(c) $\sigma(t)$在$[0,T]$上有界，即

$$\left|\sigma(x)\right|\le h,\quad t\in[0,T]; \quad (4.3.5)$$

（iii）初值解 $X_0 = Z(\omega) \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$，即 $E\left[X_0^2\right] < \infty$.

则方程（4.1.4）存在轨道唯一的连续解 X_t，且 $X_t \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$，即 $E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty$.

该定理的证明采用了经典的 Picard 逐步逼近法，该方法的思想是：先将微分方程转化成与其同解的积分方程，只要证明相应的积分方程的解具有存在唯一性即可；然后，构造一个逼近解的随机序列，再证明该序列是一致收敛到定理所要寻求的解，最后给出该解的唯一性证明.

证明　欲求证分数随机微分方程（4.1.4）存在轨道唯一的连续解，即需要得到某个轨道唯一的连续随机过程 $\{X_t, t \in [0,T]\}$ 满足相应积分方程（4.2.1）. 接下来定理的证明过程主要分为两大部分：存在性、唯一性.

（I）　存在性

在证明积分方程（4.1.4）解的存在性时细分为以下五个步骤：首先，构造一个迭代有意义的逼近解的随机序列；其次，证明该序列是依概率一致收敛到某个连续的随机过程；然后，证明该序列是依范数一致收敛到上一步得到的随机过程；再次，证明得到的随机过程是满足方程的初值解；最后，证明该解是属于既定空间的. 下面为具体的证明过程.

（i）构造定义合理、连续且属于空间 $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ 的逼近随机序列 $\{X_t^{(k)}\}$，也就是说序列的每步迭代都是有意义的.

该部分将再分为三小步予以证明：a）构造随机序列，b）证明随机序列每一项定义合理且关于 t 连续，c）证明序列每一项都属于空间 $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$.

a)　构造随机序列.

此处使用 Picard 逐步逼近的方法，定义如下逼近随机序列 $\{X_t^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$：

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = X_0, \\ X_t^{(k)} = X_0 + \int_0^t \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right) ds + \int_0^t \sigma(s)\, d\beta_1(s,H) + \int_0^t \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right) d\beta_2(s,2H). \\ \qquad t\in[0,T],\, k=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.3.6}$$

b) 证明随机序列每一项定义合理且关于t连续.

下面使用数学归纳法给予证明.

1）$X_t^{(0)}$是初值条件，在（4.3.6）式中，当$k=1$时，由于右端每一项积分都是有定义的，而且每一项积分都是连续的，所以$X_t^{(1)}$是定义合理且关于t连续.

2）假若$X_t^{(k)}$合理定义且关于t连续，则由迭代易可知$X_t^{(k+1)}$也是有定义的并且是关于t连续的.

综上所述，对任意$k=1,2,3,\cdots$，$X_t^{(k)}$都是定义合理且关于t连续. 从而 b）得证.

c) 证明序列每一项都属于空间$\mathcal{M}^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$.

为证$X_t^{(k)}\in\mathcal{M}^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$，即$E\left[\int_0^T \left|X_t^{(k)}\right|^2 dt\right]<\infty$，则只需证明$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]$在有限区间$[0,T]$有界即可，即存在某常数$l\ge 0$，使得$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le l$，且与$k,t$的选择无关. 接下来分两部分予以证明：首先得到相邻两项满足的不等式关系

$$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le C_0 + C_1\int_0^t E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds,\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots;$$

然后再通过利用 Gronwall 不等式得到常数l. 具体步骤如下：

1） 证明 $E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le C_0 + C_1\int_0^t E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds,\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots$.

其中，$C_1 = 4\left(dT + 16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)>0$，

$C_0 = 4\left[E\left[X_0^2\right] + dT^2 + 2h^2\sigma_1^2T^{2H} + 16d\sigma_2^2H^2T^{4H}\right]>0$.

利用基本不等式$\left(a+b+c+d\right)^2\le 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$，（4.3.6）式可推得

$$\left|X_t^{(k)}\right|^2 \le 4X_0^2 + 4\left|\int_0^t \mu\left(s,X_s^{(k-1)}\right)ds\right|^2 + 4\left|\int_0^t \sigma(s)\,d\beta_1(s,H)\right|^2 + 4\left|\int_0^t \gamma\left(s,X_s^{(k-1)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2.$$

两边取期望得

$$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right] \le 4E\left[X_0^2\right] + 4E\left[\left|\int_0^t \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)ds\right|^2\right] + 4E\left[\left|\int_0^t \sigma(s)\,d\beta_1(s,H)\right|^2\right]$$

$$+4E\left[\left|\int_0^t \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]$$

$$\triangleq 4\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right). \tag{4.3.7}$$

接下来，先通过对（4.3.7）式右端 A_2, A_3, A_4 分别进行放缩变换.

对 A_2，分别利用 Hölder 不等式（2.1.2）式及条件（4.3.4）式，有

$$A_2 = E\left[\left|\int_0^t \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)ds\right|^2\right] \le T \cdot E\left[\int_0^t \left|\mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right|^2 ds\right]$$

$$\le dT \cdot E\left[\int_0^t \left|1 + \left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right| ds\right] \le dT^2 + dT\int_0^t E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds. \tag{4.3.8}$$

对 A_3，分别利用（4.3.1）式和条件（4.3.5）式，有

$$A_3 = E\left[\left|\int_0^t \sigma(s)\,d\beta_1(s,H)\right|^2\right] \le 4\sigma_1^2 H^2 \cdot E\left[\int_0^t \sigma^2(s)(t-s)^{2H-1}ds\right]$$

$$\le 4h^2\sigma_1^2 H^2 \int_0^t (t-s)^{2H-1}ds = 2h^2\sigma_1^2 H t^{2H} \le 2h^2\sigma_1^2 H T^{2H}. \tag{4.3.9}$$

对 A_4，分别利用（4.3.2）式、条件（4.3.4）式以及当$1/3 < H < 1/2$，$s \in [0,t]$时，恒有$0 \le (t-s)^{4H-1} \le t^{4H-1} \le T^{4H-1}, t \in [0,T]$，有

$$A_4 = E\left[\left|\int_0^t \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]$$

$$\le 16\sigma_2^2 H^2 \cdot E\left[\int_0^t \left|\gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right|^2 (t-s)^{4H-1}ds\right]$$

$$\le 16d\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1} \cdot E\left[\int_0^t \left[1 + \left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds\right]$$

$$\le 16d\sigma_2^2 H^2 T^{4H} + 16d\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1}\left[\int_0^t E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds\right]. \tag{4.3.10}$$

综合以上三项的分析，（4.3.7）式变为：

$$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right] \le C_0 + C_1\int_0^t E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds,\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots \tag{4.3.11}$$

其中，

$C_0 = 4\left[E\left[X_0^2\right] + dT^2 + 2h^2\sigma_1^2T^{2H} + 16d\sigma_2^2H^2T^{4H}\right] > 0,\ C_1 = 4\left(dT + 16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right) > 0$.

这样，结论 1）得证.

2） 当取定$l = Le^{C_1T}$（l与k和t的选择无关，$L = C_0 + C_1T\cdot E\left[X_0^2\right]$）时，则对任意的 $k=1,2,3,\cdots$及$t\in[0,T]$，都有$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le l<\infty$.

该部分首先通过将（4.3.11）式进行变换得到新的不等式，然后利用 Gronwall 不等式证得对任意的$n\ge k>1$，有不等式$\max\limits_{1\le k\le n}E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le Le^{C_1T}\triangleq l$，$t\in[0,T]$成立. 这样即得：对任意的 $k=1,2,3,\cdots$及$t\in[0,T]$，都有$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le l<\infty$.

由于对任意的k，都有（4.3.11）式成立，则对任意的$n\ge k>1$，有

$$\max_{1\le k\le n}E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le C_0 + C_1\int_0^t\max_{1\le k\le n}E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]ds$$

因为 $\max\limits_{1\le k\le n}E\left[\left(X_s^{(k-1)}\right)^2\right]\le E\left[\left(X_s^{(0)}\right)^2\right]+\max\limits_{1\le k\le n}E\left[\left(X_s^{(k)}\right)^2\right]$

$$\begin{aligned}\max_{1\le k\le n}E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right] &\le C_0 + C_1\int_0^t\left(E\left[\left(X_s^{(0)}\right)^2\right]+\max_{1\le k\le n}E\left[\left(X_s^{(k)}\right)^2\right]\right)ds\\ &\le C_0 + C_1T\cdot E\left[X_0^2\right] + C_1\int_0^t\max_{1\le k\le n}E\left[\left(X_s^{(k)}\right)^2\right]ds,\quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

令$h(t)=\max\limits_{1\le k\le n}E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right], L = C_0 + C_1T\cdot E\left[X_0^2\right]$，则有

$$h(t)\le L + C_1\int_0^t h(s)ds.$$

由 Gronwall 不等式（2.1.5）式得

$$h(t)\le Le^{C_1t}.$$

继而有

$$\max_{1\le k\le n} E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le Le^{C_1T},\quad t\in[0,T].$$

根据n的任意性可知，当取$l=Le^{C_1T}$（l是与k和t的选择无关的常数）时，则对任意的 $k=1,2,3,\cdots$及$t\in[0,T]$，都有$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le l<\infty$. 结论 2）得证.

综上 1）2）均成立可知，c）得证. 由 a）b）c）成立可得，(i）成立. 接下来证明该随机序列的依概率一致收敛性问题.

（ii） 证明随机序列$\left\{X_t^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$在$L^2(\Omega,\mathbb{R})$空间中依概率一致收敛到某个连续的随机过程$\left\{X_t,t\in[0,T]\right\}$.

在该部分分两部分予以证明：首先，通过递推得到以下不等式

$$E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le\frac{D_2(At)^{k-1}}{(k-1)!},\ t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots$$

其中，$D_0=3\left[dT^2+2h^2T^{2H}+16dH^2T^{4H-1}\right]$，$D_1=3\left(dT+16dH^2T^{4H-1}\right)E\left[X_0^2\right]$，$D_2=D_0+D_1T$，$A=2\left(cT+16c\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)$，并用数学归纳法给予证明；然后，证明随机序列$\left\{X_t^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$在$L^2(\Omega,\mathbb{R})$中依概率一致收敛到某个连续的随机过程$\left\{X_t,t\in[0,T]\right\}$.证明过程如下：

a） 证明 $E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le\frac{D_2(At)^{k-1}}{(k-1)!},\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots$.

该部分首先，证明相邻两项满足的不等式关系

$$E\left[\left|X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\right|^2\right]\le A\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\right|^2\right]ds,\quad k=1,2,3,\cdots;$$

其中，$A=cT+16c\sigma_2^2H^2T^{4H-1}$；然后，利用归纳证明得到命题 a）成立. 接下来为这两步的具体证明过程.

1） 证明 $E\left[\left|X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\right|^2\right]\le A\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\right|^2\right]ds,\quad k=1,2,3,\cdots$.

由（4.3.6）式，对任意的$t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots$，有

$$X_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t \mu\left(s, X_s^{(k)}\right) ds + \int_0^t \sigma(s) d\beta_1(s,H) + \int_0^t \gamma\left(s, X_s^{(k)}\right) d\beta_2(s,2H)$$

$$X_t^{(k)} = X_0 + \int_0^t \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right) ds + \int_0^t \sigma(s) d\beta_1(s,H) + \int_0^t \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right) d\beta_2(s,2H)$$

两式相减并取绝对值后得

$$\left|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\right| \le \left|\int_0^t \left[\mu\left(s, X_s^{(k)}\right) - \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] ds\right| + \left|\int_0^t \left[\gamma\left(s, X_s^{(k)}\right) - \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] d\beta_2(s,2H)\right|.$$

两端分别平方，并右端利用基本不等式$(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$，然后两端再取期望得

$$E\left[\left|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\right|^2\right] \le 2E\left[\left|\int_0^t \left[\mu\left(s, X_s^{(k)}\right) - \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] ds\right|^2\right]$$

$$+2E\left[\left|\int_0^t \left[\gamma\left(s, X_s^{(k)}\right) - \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]$$

$$\triangleq 2\left(B_1 + B_2\right). \quad （4.3.14）$$

下面逐一对（4.3.14）的右端的两项B_1, B_2分别进行放缩化简.

对B_1，分别利用 Hölder 不等式（2.1.2）式、条件（4.3.3）式，有

$$B_1 = E\left[\left|\int_0^t \left[\mu\left(s, X_s^{(k)}\right) - \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] ds\right|^2\right] \le T \cdot E\left[\int_0^t \left|\mu\left(s, X_s^{(k)}\right) - \mu\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right|^2 ds\right]$$

$$\le cT \cdot E\left[\int_0^t \left|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right|^2 ds\right] = cT \cdot \int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right|^2\right] ds. \quad （4.3.15）$$

对B_2，分别利用（4.3.2）式、条件（4.3.3）式，以及当$1/3 < H < 1/2$，$s \in [0,t]$时，恒有$0 \le (t-s)^{4H-1} \le t^{4H-1} \le T^{4H-1}, t \in [0,T]$，有

$$B_2 = E\left[\left|\int_0^t \left[\gamma\left(s, X_s^{(k)}\right) - \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right] d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]$$

$$\le 16\sigma_2^2 H^2 \cdot E\left[\int_0^t \left[\gamma\left(s, X_s^{(k)}\right) - \gamma\left(s, X_s^{(k-1)}\right)\right]^2 (t-s)^{4H-1} ds\right]$$

$$\le 16c\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1} \cdot E\left[\int_0^t \left|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right|^2 ds\right]$$

$$= 16c\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1} \int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right|^2\right] ds. \quad （4.3.16）$$

综上两项，（4.3.14）式可变为：

$$E\left[\left|X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\right|^2\right]\le A\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\right|^2\right]ds,\quad k=1,2,3,\cdots \qquad (4.3.17)$$

其中， $A=2\left(cT+16c\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)$.

这样，步骤 1）得证. 下面为步骤 2）的证明过程.

2） **证明** $E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le\frac{D_2\left(At\right)^{k-1}}{(k-1)!},\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots$**.**

接下来，通过对（4.3.17）递推、归纳和证明，得到命题 2）成立.

当$k=1$时，根据（4.3.6）可得

$$E\left[\left|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}\right|^2\right]=E\left[\left|\int_0^t\mu\left(s,X_s^{(0)}\right)ds+\int_0^t\sigma(s)\,d\beta_1(s,H)+\int_0^t\gamma\left(s,X_s^{(0)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right].$$

对上式右端利用基本不等式$\left(a+b+c\right)^2\le3\left(a^2+b^2+c^2\right)$后，有

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}\right|^2\right]&\le3E\left[\left|\int_0^t\mu\left(s,X_s^{(0)}\right)ds\right|^2\right]+3E\left[\left|\int_0^t\sigma(s)\,d\beta_1(s,H)\right|^2\right]\\&\quad+3E\left[\left|\int_0^t\gamma\left(s,X_s^{(0)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]\\&\triangleq3\left(I_1+I_2+I_3\right).\end{aligned}\qquad (4.3.18)$$

下面同样逐一对（4.3.18）式右端的三项I_1,I_2,I_3分别进行放缩化简.

对I_1，根据（4.3.8）式，可得

$$I_1=E\left[\left|\int_0^t\mu\left(s,X_s^{(0)}\right)ds\right|^2\right]\le dT^2+dT\int_0^tE\left[\left(X_s^{(0)}\right)^2\right]ds.$$

对I_2，根据（4.3.9）式，可得

$$I_2=E\left[\left|\int_0^t\sigma(s)\,d\beta_1(s,H)\right|^2\right]\le2h^2\sigma_1^2HT^{2H}.$$

对I_3，根据（4.3.10）式，有

$$I_3=E\left[\left|\int_0^t\gamma\left(s,X_s^{(0)}\right)d\beta_2(s,2H)\right|^2\right]\le16d\sigma_2^2H^2T^{4H}+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\left[\int_0^tE\left[\left(X_s^{(0)}\right)^2\right]ds\right].$$

综上三项的处理，（4.3.18）式变为：

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}\right|^2\right]\\
&\le 3\left[dT^2+2h^2\sigma_1^2HT^{2H}+16d\sigma_2^2H^2T^{4H}\right]+3\left(dT+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)\int_0^t E\left[\left|X_0\right|^2\right]ds\\
&=3\left[dT^2+2h^2\sigma_1^2HT^{2H}+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right]+3\left(dT+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)t\cdot E\left[\left|X_0\right|^2\right]\\
&\le 3\left[dT^2+2h^2\sigma_1^2HT^{2H}+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right]+3T\left(dT+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)E\left[\left|X_0\right|^2\right]\\
&\triangleq D_2 .
\end{aligned}
$$

接下来，用数学归纳法证明以下递推关系式成立

$$
E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le \frac{D_2\left(At\right)^{k-1}}{(k-1)!},\quad t\in[0,T],\ k=1,2,3,\cdots \qquad (4.3.19)
$$

① 当$k=1$时，已经证明$E\left[\left|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}\right|^2\right]\le D_2$. 可见，$k=1$时（4.3.19）式成立.

② 假设当$k=n(n\ge 1)$时，有（4.3.19）式成立，即

$$
E\left[\left|X_t^{(n)}-X_t^{(n-1)}\right|^2\right]\le \frac{D_2\left(At\right)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t\in[0,T]. \qquad (4.3.20)
$$

则当$k=n+1$时，分别利用（4.3.17）式、（4.3.20）式，可得

$$
E\left[\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2\right]\le A\int_0^t E\left[\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2\right]ds\le A\int_0^t \frac{D_2\left(As\right)^{n-1}}{(n-1)!}ds=\frac{D_2\left(At\right)^{n}}{n!}.
$$

即，当$k=n+1$时，（4.3.19）式成立.

综上①②可得，对所有的$k=1,2,3,\cdots$（4.3.19）式都恒成立，即结论 2）得证. 由结论 1）2）均成立，所以结论 a）得证. 下证结论 b）.

b） 证明随机序列$\left\{X_t^{(k)}\right\}$在$L^2(\Omega,\mathbb{R})$空间中，依概率一致收敛到某个连续的随机过程$\left\{X_t,t\in[0,T]\right\}$.

对（4.3.19）式两端分别取上确界后，有

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le\frac{D_2\left(AT\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!},\quad k=1,2,3,\cdots \tag{4.3.21}$$

根据 Chebyshev's 不等式（2.1.4）式及（4.3.21）式，得

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|\ge\frac{1}{2^k}\right\}\le 2^{2k}E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]$$

$$\le\frac{2^{2k}D_2\left(AT\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}=\frac{4D_2\left(4AT\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}.$$

利用比式判别法可以证明，正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4D_2\left(4AT\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}$是收敛的，故由比较判别法可得函数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|\ge\frac{1}{2^k}\right\}<\infty.$$

由 Borel-Cantelli's 引理（2.1.1）式得

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|\ge\frac{1}{2^k},\ \text{i.o.}\right\}=0.$$

从而，对几乎所有的$\omega\in\Omega$，必存在某正整数$k_0=k_0\left(\omega\right)$，使得当$k>k_0$时，有

$$\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|<\frac{1}{2^k}.$$

由于正项级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$是收敛的，故由此可见，函数项级数$X_t^{(0)}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(X_t^{(i)}-X_t^{(i-1)}\right)$的部分和$X_t^{(0)}+\sum_{i=1}^{k}\left(X_t^{(i)}-X_t^{(i-1)}\right)=X_t^{(k)}$在$\left[0,T\right]$上，对几乎所有的$\omega\in\Omega$，是依概率一致收敛的，不妨记其收敛为$X_t=X_t\left(\omega\right)$. 又因为对每一个$k$而已，$X_t^{(k)}$对几乎所有的$\omega\in\Omega$是关于$t$连续的. 因此，极限$X_t$对几乎所有的$\omega\in\Omega$也是关于$t$连续的，也就是说构造的随机序列$\left\{X_t^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$在$L^2\left(\Omega,\mathbb{R}\right)$空间中，是依概率一致收敛到某个连续的随机过程$\left\{X_t,t\in\left[0,T\right]\right\}$. 于是，结论（ii）得证.

（iii）证明随机序列$\left\{X_t^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$在$L^2\left(\Omega,\mathbb{R}\right)$空间中几乎处处依范数一致收敛到连续

随机过程$\left\{X_t, t\in[0,T]\right\}$.

在空间$L^2(\Omega,\mathbb{R})$中，对任意的$t\in[0,T]$，当$m>n\ge 0$时，分别利用范数三角不等式（2.1.3）式、（4.3.19）式，有

$$\left\|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}\right\|_2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\left(X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right)\right\|_2\le\sum_{k=n+1}^{m}\left\|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right\|_2$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}\left\{E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=n+1}^{m}\left[\frac{D_2(At)^{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{D_2(AT)^{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

利用比式判别法，易证正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{D_2(AT)^{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\frac{1}{2}}$是收敛的. 因此，其余

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{D_2(AT)^{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad k\to\infty\text{时}.$$

从而，对所有的$t\in[0,T]$，$\left\|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}\right\|_2$一致收敛于$0$. 由 Cauchy 一致收敛准则可知，$\left\{X_t^{(k)}\right\}$在$L^2(\Omega,\mathbb{R})$中是依范数一致收敛的. 又因为$\left\{X_t^{(k)}\right\}$对所有的$t\in[0,T]$是依概率一致收敛到连续的随机过程$\left\{X_t, t\in[0,T]\right\}$，依据随机收敛性的关系，必有$\left\{X_t^{(k)}\right\}$的子列几乎处处依范数一致收敛到连续的随机过程$\left\{X_t, t\in[0,T]\right\}$. 从而，结论（iii）得证.

（iv）证明连续随机过程$\left\{X_t, t\in[0,T]\right\}$是满足初值为$X_0=Z(\omega)$的分数随机微分方程（4.1.4）的强解，也就是$X_t$满足积分方程（4.2.1）.

该部分分两步证明：首先，证明（4.3.6）式中每一个积分都是均方收敛到方程（4.2.1）中相应的积分；然后，再令（4.3.6）式中$k\to\infty$，则（4.3.6）收敛到方程（4.2.1）. 证明过程如下：

a） 证明以下积分收敛.

$$\int_0^t\mu\left(s,X_s^{(k)}\right)ds\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t\mu\left(s,X_s\right)ds;\qquad(4.3.22)$$

$$\int_0^t\gamma\left(s,X_s^{(k)}\right)d\beta_2(s,2H)\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t\gamma\left(s,X_s\right)d\beta_2(s,2H).\qquad(4.3.23)$$

在证明过程（iii）中，已经寻找到了 X_t，使得 $E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t\right|^2\right]\to 0,\ \left(k\to\infty\right).$
根据（4.3.15）式的推导过程，可以容易得到

$$E\left[\left|\int_0^t \mu\left(s,X_s^{(k)}\right)ds-\int_0^t \mu\left(s,X_s\right)ds\right|^2\right]$$

$$\le cT\cdot\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)}-X_s\right|^2\right]ds \quad \to 0 \qquad \left(k\to\infty\right).$$

根据（4.3.16）式的推导过程，同样可以得到

$$E\left[\left|\int_0^t \gamma\left(s,X_s^{(k)}\right)d\beta_2\left(s,2H\right)-\int_0^t \gamma\left(s,X_s\right)d\beta_2\left(s,2H\right)\right|^2\right]$$

$$\le 16c\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k)}-X_s\right|^2\right]ds \quad \to 0 \qquad \left(k\to\infty\right).$$

这样，（4.3.22）（4.3.23）两式均成立. 从而，a）得证.

b）　证明 X_t 满足积分方程（4.2.1）.

根据 a)，在方程（4.3.6）式两边令 $k\to\infty$，即得积分方程（4.2.1）.
这样，综上 a）b）均成立，（iv）得证. 下面给出（v）的证明.

（v）如果 X_t 为满足方程（4.1.4）且具有初值为 $X_0=Z\left(\omega\right)$ 的强解，则有 $X_t\in\mathcal{M}^2\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$，即 $E\left[\int_0^T\left|X_t\right|^2dt\right]<\infty$.

为证 $X_t\in\mathcal{M}^2\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$，则只需证 $E\left[\left|X_t\right|^2\right]$ 在有限区间 $\left[0,T\right]$ 有界即可，即存在常数 l，使得 X_t 满足如下不等式即可，

$$E\left[\left|X_t\right|^2\right]\le l<\infty.$$

其中，$l=Le^{C_1T}$，$L=C_0+C_1T\cdot E\left[X_0^2\right]$，

$C_0=4\left[E\left[X_0^2\right]+dT^2+2h^2\sigma_1^2T^{2H}+16d\sigma_2^2H^2T^{4H}\right]>0,\ C_1=4\left(dT+16d\sigma_2^2H^2T^{4H-1}\right)>0$.

在步骤（i）中已经证明了对任意的 $k=1,2,3,\cdots$ 及 $t\in\left[0,T\right]$，都有下式成立

$$E\left[\left|X_t^{(k)}\right|^2\right]\le l<\infty. \qquad (4.3.24)$$

在步骤（iv）已证$\left\{X_t^{(k)}\right\}$几乎处处一致收敛到X_t. 所以，在不等式（4.3.24）式两端令$k\to\infty$，即可得到$E\left[\left|X_t\right|^2\right]\le l<\infty$. 从而，（v）得证.

综合以上（i）-（v）五个步骤，最终可得命题（I）成立，即方程（4.1.4）存在连续强解X_t，且$X_t\in\mathcal{M}^2\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$.

下面给出强解的唯一性证明.

（II） 唯一性

强解的唯一性即指轨道唯一性. 所以接下来利用 Gronwall 不等式给出轨道唯一性证明.

假设现有两个随机过程$X_t,Y_t\in\mathcal{M}^2\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$为满足方程的解，即

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t\sigma\left(t\right)d\beta_1\left(s,H\right)+\int_0^t\gamma\left(s,X_s\right)d\beta_2\left(s,2H\right),\ X_0=Z\left(\omega\right);$$

$$Y_t=Y_0+\int_0^t\mu\left(s,Y_s\right)ds+\int_0^t\sigma\left(t\right)d\beta_1\left(s,H\right)+\int_0^t\gamma\left(s,Y_s\right)d\beta_2\left(s,2H\right)\quad,\quad Y_0=Z\left(\omega\right).$$

两式相减，并取绝对值后可得

$$\begin{aligned}\left|X_t-Y_t\right|\le\left|X_0-Y_0\right|&+\left|\int_0^t\left[\mu\left(s,X_s\right)-\mu\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|\\&+\left|\int_0^t\left[\gamma\left(s,X_s\right)-\gamma\left(s,Y_s\right)\right]d\beta_2\left(s,2H\right)\right|\end{aligned}\tag{4.3.25}$$

对（4.3.25）式右端利用基本不等式$\left(a+b+c\right)^2\le3\left(a^2+b^2+c^2\right)$，然后两端取期望得

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\le3E\left[\left|X_0-Y_0\right|^2\right]&+3E\left[\left|\int_0^t\left[\mu\left(s,X_s\right)-\mu\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2\right]\\&+3E\left[\left|\int_0^t\left[\gamma\left(s,X_s\right)-\gamma\left(s,Y_s\right)\right]d\beta_2\left(s,2H\right)\right|\right]^2\\&\triangleq3\left(J_1+J_2+J_3\right).\end{aligned}\tag{4.3.26}$$

对J_2，利用（4.3.15）的方法，易得

$$J_2=E\left[\left|\int_0^t\left[\mu\left(s,X_s\right)-\mu\left(s,Y_s\right)\right]ds\right|^2\right]\le cT\cdot\int_0^tE\left[\left|X_s-Y_s\right|^2\right]ds.$$

对 J_3，利用（4.3.16）的方法，同样可得

$$J_3 = E\left[\left|\int_0^t \left[\gamma\left(s, X_s\right) - \gamma\left(s, Y_s\right)\right] d\beta_2\left(s, 2H\right)\right|^2\right] \le 16c\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1} \int_0^t E\left[\left|X_s - Y_s\right|^2\right] ds .$$

综上可得：

$$E\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] \le 3E\left[\left|X_0 - Y_0\right|^2\right] + 3\left[cT + 16c\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1}\right] \int_0^t E\left[\left|X_s - Y_s\right|^2\right] ds .$$

令 $u(t) = E\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right], 0 \le t \le T;\ B = 3\left[cT + 16c\sigma_2^2 H^2 T^{4H-1}\right];\ F = 3E\left[\left|X_0 - Y_0\right|^2\right]$，

则有

$$u(t) \le F + B\int_0^t u(s) ds .$$

由 Gronwall 不等式（2.1.5）式，得

$$u(t) \le Fe^{B \cdot t} .$$

根据假设 $X_0 = Y_0 = Z(\omega)$，故 $F \equiv 0$. 从而，对几乎所有的 $t \in [0, T]$，有

$$u(t) = E\left[\left|X_t - Y_t\right|^2\right] = 0 .$$

由此说明，X_t 与 Y_t 是无差别的，即 $P\left\{X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]\right\} = 1$，轨道唯一，即（II）唯一性得证.

综合（I）（II）即得：当 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 时，基于分数阶 Maruyama 表示的分数随机微分方程强解的存在唯一性定理得证. 证毕□

本定理的意义在于，对于满足条件的 FSDE，确保其强解的存在唯一性.

4.4 分数随机微分方程解的误差估计

为了描述以上构造的近似解（随机序列）与真实解之间的精确程度如何，接下来给出解的误差估计.

定理 4.4.1 设 $\left\{X_t^{(k)}\right\}$ 为定理 4.3.2 中定义的逼近随机序列，即方程（4.1.4）的近似解；X_t 为其一致收敛极限，即方程（4.1.4）的真实解，则近似解 $X_t^{(k)}$ 与真实解 X_t 满足如下不等式:

$$E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t\right|^2\right]\le\frac{2D_2\left(At\right)^k}{k!}e^{2At}.$$

证明 与（4.3.17）式的推导过程相仿，可以得到：对任意的$t\in[0,T]$，有

$$E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t\right|^2\right]\le A\int_0^t E\left[\left|X_s^{(k-1)}-X_s\right|^2\right]ds$$
$$=A\int_0^t\left\|X_s^{(k-1)}-X_s\right\|_2^2ds,\quad k=1,2,3,\cdots.$$

根据范数三角不等式（2.1.3）式以及基本不等式$\left(a+b\right)^2\le2\left(a^2+b^2\right)$，得

$$A\int_0^t\left\|X_s^{(k-1)}-X_s\right\|_2^2ds=A\int_0^t\left[\left(\left\|X_s^{(k-1)}-X_s^{(k)}\right\|_2+\left\|X_s^{(k)}-X_s\right\|_2\right)^2\right]ds$$
$$\le2A\int_0^t\left[\left\|X_s^{(k-1)}-X_s^{(k)}\right\|_2^2+\left\|X_s^{(k)}-X_s\right\|_2^2\right]ds.$$

又由（4.3.19）式得

$$\left\|X_t^{(k-1)}-X_t^{(k)}\right\|_2^2=E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}\right|^2\right]\le\frac{D_2\left(At\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}.$$

令$\varphi\left(t\right)=E\left[\left|X_t^{(k)}-X_t\right|^2\right]=\left\|X_t^{(k)}-X_t\right\|_2^2,0\le t\le T$. 则有

$$\varphi\left(t\right)\le2A\int_0^t\left[\frac{D_2\left(As\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}+\varphi\left(s\right)\right]ds=\frac{2D_2\left(At\right)^k}{k!}+2A\int_0^t\varphi\left(s\right)ds.$$

由 Gronwall 不等式（2.1.5）式可得

$$\varphi\left(t\right)\le\frac{2D_2\left(At\right)^k}{k!}e^{2At}.$$

证毕□

4.5 本章小结

研究随机微分方程的首要问题就是要明确其解的存在与否. 在关于分数随机微分方程解的存在唯一性的研究中，对于当 Hurst 指数$1/2<H<1$时的情形，已有很多学者给出了证明，但当 Hurst 指数$0<H<1/2$时，却相对有较少的理论研究成果.

本章首先对基于分数阶 Maruyama 表示的 FSDE 作以简单介绍，然后定义了 Hurst

指数$H \in (1/3,1/2)$时，基于分数阶 Maruyama 表示的，且初值条件为$X_0 = Z(\omega)$的分数随机微分方程：

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t)d\beta_1(t,H) + \gamma(t, X_t)d\beta_2(t,2H), \quad t \in [0,T]$$

的解的有关基本概念，之后在通常的一致 Lipschitz 条件和线性增长条件下，通过使用 Picard 逐步逼近的方法给出了该方程解的存在唯一性定理及其证明，最后讨论了关于方程构造的近似解与真实解的误差估计.

5 总结与展望

5.1 全文总结

本文首先对一类特殊 Hurst 指数的分数随机微分方程以及分数型 Itô 公式进行了改进与推广，然后分别推导出了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 和 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时分数线性随机微分方程的一般解，最后利用 Picard 逐步逼近的方法以及分数阶导数和积分的理论证明了在通常的一致 Lipschitz 条件、线性增长条件以及有界条件下，Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 时，基于分数阶 Maruyama 表示的分数随机微分方程在通常的一致 Lipschitz 条件、线性增长条件以及有界条件下，解的存在唯一性定理以及逼近解与真实解的估计.

相比于前人工作，本文的研究具有以下创新点：

1. 本文根据属于不同区间 $(1/n, 1/(n-1))$ 的 Hurst 指数 H，改进和推广了分数随机微分方程的形式以及分数型 Itô 公式，拓宽了分数随机微分方程的研究领域.
2. 关于分数线性随机微分方程的一般解，前人往往处理的是针对于 Hurst 指数 $1/2 < H < 1$ 时的情形，但至于 Hurst 指数 $0 < H < 1/2$ 时的情形却很少见. 本文给出了 Hurst 指数 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时，更为一般化的分数线性随机微分方程的一般解，并对其特殊方程的解也进行了讨论.
3. 当 Hurst 指数 $0 < H < 1/2$ 时，关于 FSDE 解的存在唯一性的理论成果相对较少. 本文使用利用 Picard 逐步逼近和分数阶导数和积分的理论理论给出了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 时，分数随机微分方程解的存在唯一性定理.

5.2 课题展望

由于时间紧迫以及本人能力有限，恕不能一一对该课题做更深层次的研究，但

是可以对该课题做以下展望，希望能对此感兴趣的人士予以帮助.

1、 本文主要研究的是如下形式的分数随机微分方程：

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t)d\beta_1(t, H) + \gamma(t, X_t)d\beta_2(t, 2H)$$

解的存在唯一性，接下来可以继续研究更为一般化的分数随机微分方程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\beta_1(t, H) + \gamma(t, X_t)d\beta_2(t, 2H)$$

解的存在唯一性.

2、 本文证明了 Hurst 指数 $H \in (1/3, 1/2)$ 时，分数随机微分方程解的存在唯一性定理，接下来可以尝试证明 $H \in (1/n, 1/(n-1))$ 时，分数随机微分方程解的存在唯一性定理.

3、 对于一般的分数随机微分方程而言，即使它满足了解的存在唯一性定理，但往往也很难能找到它的解析解. 这样，不妨可以尝试着运用数值算法（Euler、Runge-Kutta 等）求其数值解.

致 谢

光阴似箭，岁月如梭. 转眼间，随着毕业论文即将告于段落，将近二十年的求学生涯也将划以句号. 在这即将走出校园、踏入社会的毕业之际，思绪万千，心情难以平静，忘不了学校里的点点滴滴. 求学期间，我不仅学到了浩瀚的理论知识，丰富了自己的头脑，而且还结识了很多老师和同学，得到了许多的关怀和帮助，收获了至珍至宝的友谊，现在要向他们表达我最诚挚的谢意.

首先，我要衷心感谢我的导师梅正阳副教授. 由于时间及本人研究能力的水平的限制，在撰写论文的整个过程中，梅老师在百忙之中定期给我们上讨论班，共同探讨论文中遇到的问题，多次对我提出具有指导性和方向性的意见，直到完成论文的终稿. 感谢梅老师，谢谢他对我的悉心指导，宽容与体谅. 梅老师无私的呵护和严谨治学的作风，将永远激励我“百尺竿头，更进一步！”

其次，感谢杨明老师、蹇明老师，是他们拓宽了我的专业知识，为论文的书写奠定基础. 感谢在平时的讨论班以及撰写论文的过程中与我共同探讨论文，并不断给予指点的王丽丽同学，感谢曾经给予我鼓励和帮助的陈爱香、张春晓、艾灵志等同学. 正是由于他们的支持和帮助，我才克服种种困难，顺利完成论文.

再次，感谢我的父母，是他们多年的辛勤付出和精心培育才有了今天的我，我将永远牢记于心.

最后，再次怀念论文撰写期间付出的日日夜夜和辛勤付出，这是对我人生的磨练，也是我在读研期间感到最为深刻、充实的一段记忆！

参考文献

[1] Turner A. L., Weigel E. J. An Analysis of Stock Market Volatility[J]. Russell Research Commentaries, 1990: 1132-1175.

[2] 戴国强, 徐龙炳, 陆蓉. 国际汇率波动的非线性探索及其政策意义[J]. 国际金融研究, 1999, 10: 9-15.

[3] Peter E. E. Fractal market analysis[J]. New York: Wiley, 1994: 55-69.

[4] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications[M]. New York: Wily, 1974.

[5] Bernt Øksendal. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M]. 5th Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[6] T. C. Gard. A General Uniqueness for Theory of Stochastic Differential Equations[J]. SIAMJ. Cont. Opt., 1976, 14: 445-457.

[7] Yeh J. Existence of weak solutions for stochastic differential equations in the plane with continuous coefficients[J]. Trans Amer Math Soc, 1985, 290: 345-361.

[8] 曹桂兰, 何凯. 由无穷个 Brown 单驱动的随机微分方程解的存在唯一性[J]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26A(6): 813-823.

[9] F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, T. Zhang. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications[M]. Springer-Verlag, 2008.

[10] D. Nualart, Y. Ouknine. Regularization of differential equations by fractional noise, Stochastic Process[J]. Appl, 2002, 102: 103-116.

[11] D. Nualart, A. Rascanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion[J]. Collect. Math., 2002, 53: 55-81.

[12] Laurent Denis, Mohamed Erraoui, Youssef Ouknine. Existence and uniqueness for solutions of one dimensional SDE's driven by an additive fractional noise[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 2004, 76(5): 409-427.

[13] B. Boufoussi, S. Hajji. Functional differential equations driven by a fractional Brownian motion[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(2): 746-754.

[14] D. Nualart, A. Rascanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion[J]. Collectanea Mathematica, 2002, 53(1): 55-81.

[15] L. Coutin, Z. Qian. Stochastic differentions for fractional Brownian motions[J]. Lith. Math., 2000, 40: 104-110.

[16] T. Lyons. Differential equation driven by rough signals[J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1998, 149(2): 215-310.

[17] 胡适耕, 黄乘明, 吴付科等. 随机微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[18] Mao Xuerong. Stochastic Functional Differential Equations[M]. Springer, 1976.

[19] 张波, 张景肖等. 应用随机过程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[20] 高海音. 随机微分方程解的存在性和有界性理论[博士学位论文]. 东北师范大学图书馆, 2006.

[21] N. Wiener. Differential Space[J]. J. Math. Phys., 1923(2): 131-174.

[22] Salih N. Neftci. An Introduce to the Mathematics of Financial Derivatives[M]. Academic Press, 2000.

[23] A. N. Kolmogorov. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum[J]. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS, 1940, 16: 115-118.

[24] B. Mandelbrot, J. van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. J. SIAM Rev., 1968, 10(4): 422-437.

[25] H. E. Hurst. Long-term storage capacity in reservoirs[J]. Trans. Amer. Soc. Civil Eng, 1951, 116: 400-410.

[26] D. Nualart, Alòs E., Mazet O. Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst index $H < 1/2$ [J]. Stoch. Proc. Appl., 2000, 86(1): 121-139.

[27] Saelim, R. On some fractional stochastic models in finance[J]. Ph. D. Dissertation,

Suranaree University of Technology, Thailand, 2004.

[28] W. Dai, C. C. Heyde. Itô formula with respect to fractional Brownian motion and its application[J]. Appl. Math. Stoch. Anal, 1996, 9: 439-448.

[29] L. Decreusefond, A. S. Ustunel. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion[J]. Potential Anal, 1998, 10: 177-214.

[30] L. C. G. Rogers. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 95-105.

[31] P. Cheridito. Arbitrage in fractional Brownian motion models[J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(4): 533-553.

[32] Yao Zhong Hu, B. Øksendal. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003, 6(1): 1-32.

[33] Christian Bender. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2003, 104(1): 81-106.

[34] Elliott R. J., Vander Hoek J. A general fractional white noise theory and applications to finance[J]. Math Finance , 2003, 13(2): 301-330.

[35] E. Alòs, D. Nualart. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion[J]. Stochastics and Stochastic Reports, 2003, 75(3): 129-152.

[36] E. Alòs, J. A. Léon, D. Nualart. Stochastic Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than 1/2[J]. Taiwanese J. Math., 2001, 5(3): 609-632.

[37] G. Jumarie. Fractional Brownian motions via random walk in the complex plane and via fractional derivative[J]. Comparison and further results on their Fokker-Planck equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22(4): 907-925.

[38] Lv Longjin, Fu-Yao Ren, Wei-Yuan Qiu. The application of fractional derivatives in stochastic models driven by fractional Brownian motion[J]. Physica A, 2010, 389(21): 4809-4818.

[39] G. Jumarie. Stochastic differential equations with fractional Brownian motion input[J]. Int. J. Syst. Sci., 1993, 24(6): 1113-1132.

[40] G. Jumarie. On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^{\alpha}$ [J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(7): 739-748.

[41] Bender C. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2003, 104(1): 81-106.

[42] Xiao-Tian Wang, Wei-Yuan Qiu, Fu-Yao Ren. Option pricing of fractional version of the Black-Scholes model with Hurst exponent H being in $(1/3,1/2)$ [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12: 599-608.

[43] 梅正阳, 祁改柯, 王同柱. Options Pricing of fractional model with Hurst index H being $(1/3,1/2)$ [J]. Mathematic Apply, 2011, 24(3): 617-623.

[44] Thao T. H. An approximate approach to fractional analysis of finance[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2006, 7(1): 124-132.

[45] 王子亭, 李萍. 分数随机微分方程的一般解[J]. 中国石油大学学报：自然科学版, 2009, 33(1): 167-170.

[46] Guy Jumarie. Stock exchange fractional dynamics defined as fractional exponential growth driven by (usual) Gaussian white noise[J]. Application to fractional Black-Scholes equations. Mathematics and Economics, 2008, 42: 271-287.